

ENUNCIADO EJEMPLO 12

Placa cuadrada con un vertice fijo en el origen de coordenadas y un lado apoyado en el plano OXY.

Paso 0. Reiniciación de las variables del sistema y llamada a los paquetes linalg, plots y plottools.

```
> restart:
```

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected
```

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> with(plottools):
```

```
Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> libname:="C:/",libname:
```

```
> with(mecapac3d):
```

Paso 1. Definimos las coordenadas generalizadas del sistema en una lista que se denominará cg.

En este caso serán "theta" (giro del eje perpendicular a la barra en sentido positivo respecto al eje Z fijo o, lo que es lo mismo, rotación alrededor del eje relativo x ligado a la barra) y "phi" (giro del eje que se hace coincidir con el lado que permanece apoyado sobre el plano OXY y el eje X de la referencia fija, es decir, rotación alrededor del eje Z fijo).

```
> cg:=[theta,phi];
```

```
cg:= [θ, φ]
```

Paso 2. Definición mediante variables de los elementos que forman el sistema mecánico. Es decir, el aro, el disco y el muelle.

```
> rot1:=rota(phi,3):
```

```
> rot2:=rota(theta,1):
```

```
> rottot:=evalm(rot1&*rot2):
```

```
> cuadrado:=[rectangulo,[a/2*(cos(phi)-cos(theta)*sin(phi)),a/2*(sin(phi)+  
cos(theta)*cos(phi)),a/2*sin(theta)],rottot,m,a,a];
```

```
cuadrado:= [ rectangulo [  $\frac{1}{2} a (\cos(\phi) - \sin(\phi) \cos(\theta))$ ,  $\frac{1}{2} a (\sin(\phi) + \cos(\phi) \cos(\theta))$ ,  $\frac{1}{2} a \sin(\theta)$  ], rottot, m, a, a ]
```

Paso 3. Definición de los elementos gráficos que definiran nuestro sistema de ejes.

```
> ejeX:=[vector,[0,0,0],vector([3/2*a,0,0]),red]:
```

```
> ejeY:=[vector,[0,0,0],vector([0,3/2*a,0]),green]:
```

```

> ejeZ:=[vector,[0,0,0],vector([0,0,3/2*a]),blue]:
> ejex:=[vector,[0,0,0],vector([3/2*a*cos(phi),3/2*a*sin(phi),0]),red]:
> ejeY:=[vector,[0,0,0],vector([-3/2*a*sin(phi)*cos(theta),3/2*a*cos(phi)*
cos(theta),3/2*a*sin(theta)]),green]:
> ejez:=[vector,[0,0,0],vector([3/2*a*sin(theta)*sin(phi),-3/2*a*cos(phi)*
sin(theta),3/2*a*cos(theta)]),blue]:
> a1:=[angulo,[1/2*a,0,0],[0,0,0],[1/2*a*cos(phi),1/2*a*sin(phi),0],1/2*a]
:
> a2:=[angulo,[0,0,1/2*a],[0,0,0],[1/2*a*sin(theta)*sin(phi),-1/2*a*cos(phi)*
sin(theta),1/2*a*cos(theta)],1/2*a]:
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
> TX := [texto,[0,15,1],"X"]:
> TY := [texto,[0,15,1],"Y"]:
> TZ := [texto,[0,0,21],"Z"]:

```

Paso 4. Definición de la variable sistema que agrupa en una lista todos los elementos anteriores.

```

> sistema:=[cuadrado,ejeX,ejeY,ejeZ,ejex,ejeY,ejez,a1,a2,TO,
TX,TY,TZ ];

```

```

sistema= [
[
rectangulo [
1/2 a (cos(phi) - sin(phi) cos(theta)), 1/2 a (sin(phi) + cos(phi) cos(theta)), 1/2 a sin(theta)
], rottet m, a, a
],
[
vector [0, 0, 0], [
3/2 a, 0, 0
], red
], [
vector [0, 0, 0], [
0, 3/2 a, 0
], green
],
[
vector [0, 0, 0], [
0, 0, 3/2 a
], blue
], [
vector [0, 0, 0], [
3/2 a cos(phi), 3/2 a sin(phi), 0
], red
],
[
vector [0, 0, 0], [
-3/2 a sin(phi) cos(theta), 3/2 a cos(phi) cos(theta), 3/2 a sin(theta)
], green
],
[
vector [0, 0, 0], [
3/2 a sin(theta) sin(phi), -3/2 a cos(phi) sin(theta), 3/2 a cos(theta)
], blue
],
[
angulo [
1/2 a, 0, 0
], [0, 0, 0], [
1/2 a cos(phi), 1/2 a sin(phi), 0
], 1/2 a
],
[
angulo [
0, 0, 1/2 a
], [0, 0, 0], [
1/2 a sin(theta) sin(phi), -1/2 a cos(phi) sin(theta), 1/2 a cos(theta)
], 1/2 a
],
[
texto [0, 0, -1], "O", [
texto [0, 15, 1], "X", [
texto [0, 15, 1], "Y",

```

[texto[0, 0, 21], "Z"]

Paso 5. Obtención de la energía cinética del sistema mediante fT asignándola a la variable T.

> T:=fT(sistema);

$$T := \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4} a^2 (-\sin(\phi) \phi_1 - \cos(\phi) \phi_1 \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta) \theta_1)^2 + \frac{1}{4} a^2 (\cos(\phi) \phi_1 - \sin(\phi) \phi_1 \cos(\theta) - \cos(\phi) \sin(\theta) \theta_1)^2 + \frac{1}{4} a^2 \cos(\theta)^2 \theta_1^2 \right) + \frac{1}{24} \theta_1^2 m a^2 + \frac{1}{24} \phi_1^2 \sin(\theta)^2 m a^2 + \frac{1}{12} \cos(\theta)^2 \phi_1^2 m a^2$$

Observamos que en la Energía Cinética aparecen dos términos diferenciados, el primero es debido a la traslación del centro de gravedad de la placa y el segundo a la rotación alrededor de este mismo.

Paso 6. Obtención de la energía potencial del sistema mediante fV asignándola a la variable V.

> V:=fV(sistema);

$$V := \frac{1}{2} m g a \sin(\theta)$$

Paso 7. Obtención de la lagrangiana como diferencia de energías entre la energía cinética y la potencial.

> L:=T-V;

$$L := \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4} a^2 (-\sin(\phi) \phi_1 - \cos(\phi) \phi_1 \cos(\theta) + \sin(\phi) \sin(\theta) \theta_1)^2 + \frac{1}{4} a^2 (\cos(\phi) \phi_1 - \sin(\phi) \phi_1 \cos(\theta) - \cos(\phi) \sin(\theta) \theta_1)^2 + \frac{1}{4} a^2 \cos(\theta)^2 \theta_1^2 \right) + \frac{1}{24} \theta_1^2 m a^2 + \frac{1}{24} \phi_1^2 \sin(\theta)^2 m a^2 + \frac{1}{12} \cos(\theta)^2 \phi_1^2 m a^2 - \frac{1}{2} m g a \sin(\theta)$$

> L:=simplify(L);

$$L := -\frac{1}{12} m a (-2 a \phi_1^2 + 3 a \phi_1 \sin(\theta) \theta_1 - 2 \theta_1^2 a - 2 \cos(\theta)^2 \phi_1^2 a + 6 g \sin(\theta))$$

Paso 8. Obtención de las ecuaciones de lagrange para las dos coordenadas generalizadas mediante el operador Ec_lag

> ecua:=ec_lag();

ecua:=

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{12} m a \left(3 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) \sin(\theta(t)) + 3 a \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) - 4 \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) a \right) \\
& + \frac{1}{12} m a \left(3 a \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) + 4 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)^2 a \sin(\theta(t)) + 6 g \cos(\theta(t)) \right), \\
& -\frac{1}{12} m a \left(-4 a \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) + 3 a \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 + 3 a \sin(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) \right. \\
& \left. + 8 \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right) a \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) - 4 \cos(\theta(t))^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \phi(t) \right) a \right)
\end{aligned}$$

Paso 9. Asignación de valores numéricos a los parámetros que quedan sin asignar para poder proceder a la integración numérica.

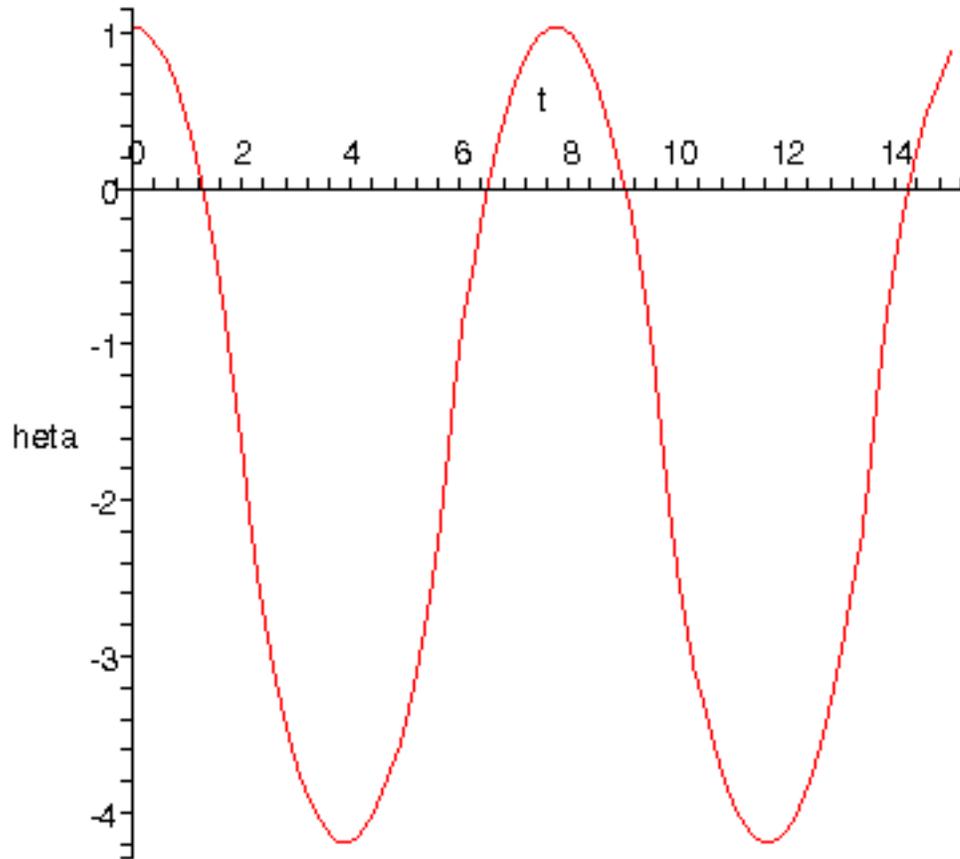
> a:=10:g:=9.8:m:=10:

Paso 10. Integración numérica del problema mediante la función fint asignando el resultado a la variable res.

> res:=fint([Pi/3,0,0,0.6]):

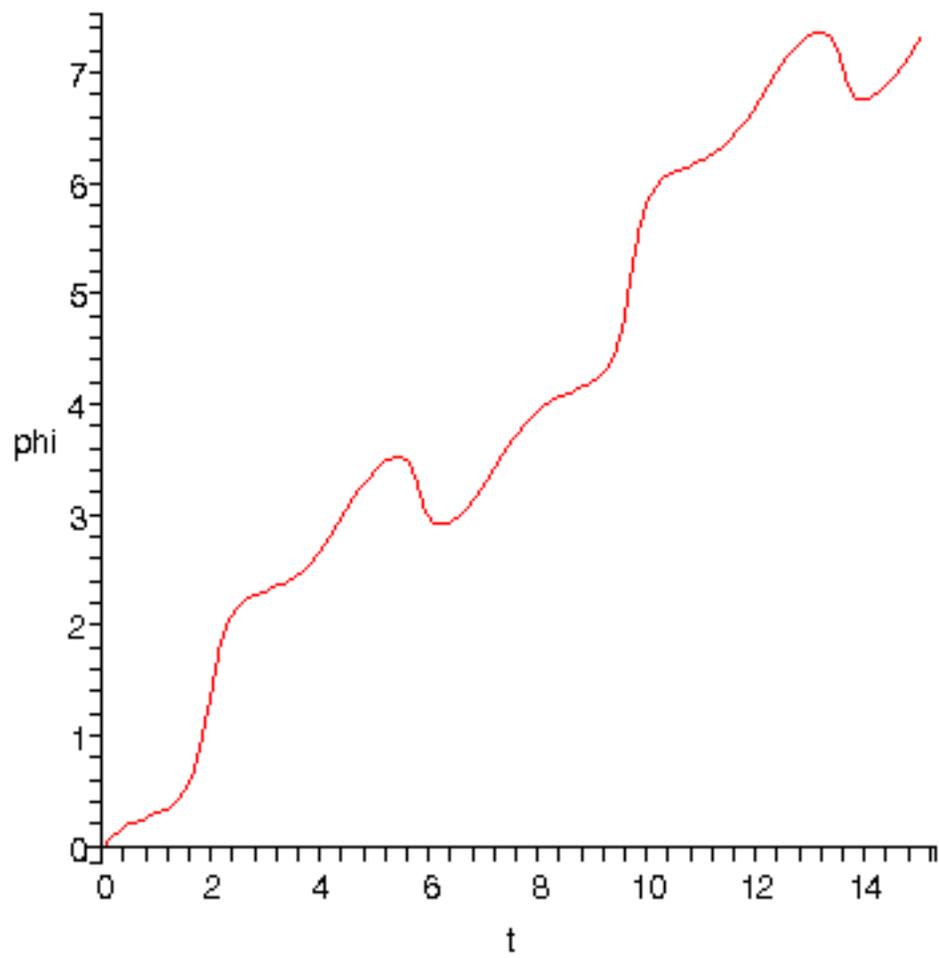
Paso 11. Representación gráfica de las evoluciones temporales de theta y phi mediante odeplot.

> odeplot(res,[t,theta(t)],0..15.,numpoints=100);

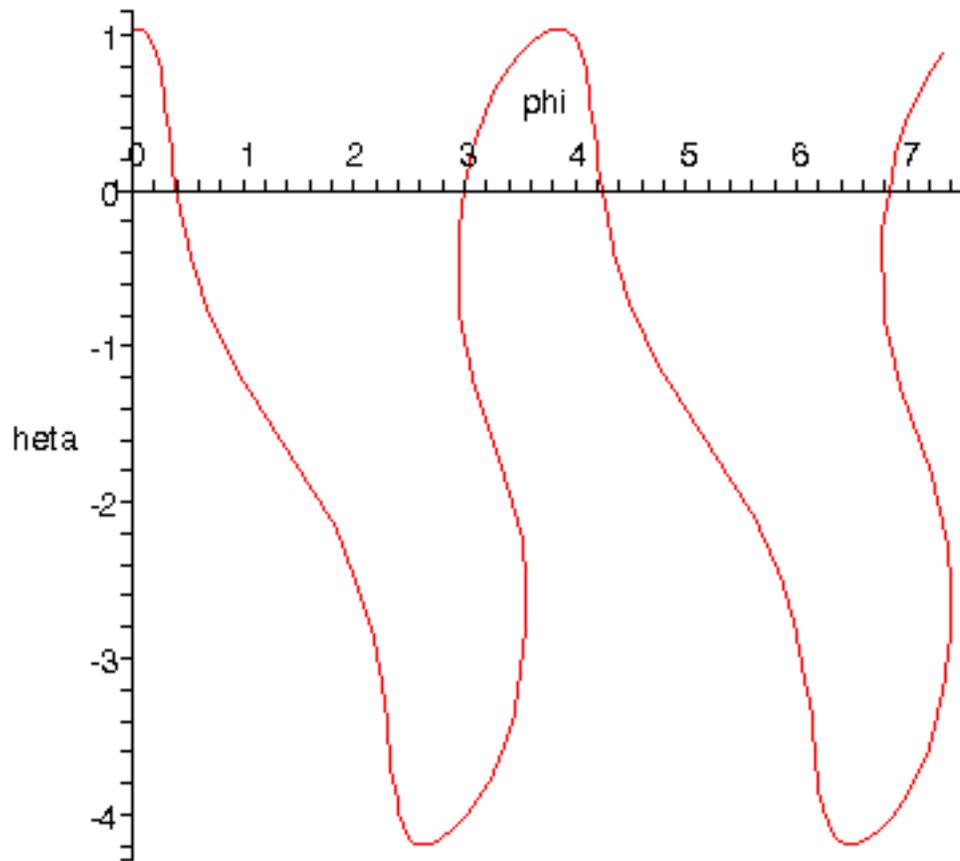


Observamos que theta evoluciona respecto del tiempo armonicamente entre el ángulo inicial ($\pi/3$) y su simétrico ($2\pi - \pi/3$). Esto es debido a que las únicas fuerzas que producen trabajo sobre el sistema son conservativas, a que en el estado inicial la derivada de theta respecto del tiempo es nula y a que las reacciones producidas por el giro phi no producen momentos respecto al eje x de la referencia relativa.

```
> odeplot(res,[t,phi(t)],0..15.,numpoints=100);
```



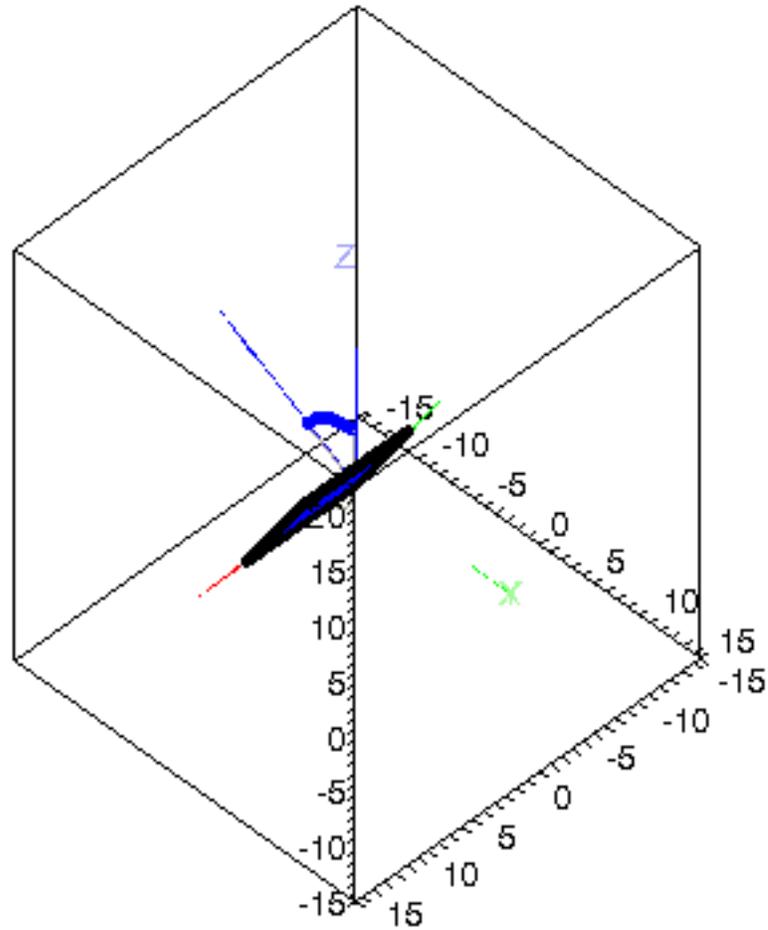
```
> odeplot(res,[phi(t),theta(t)],0..15.,numpoints=100);
```



Al analizar la evolución temporal de phi observamos que, en general, crece en el tiempo y que además lo hace siguiendo una pauta periódica pero que en ciertos tramos decrece. Si comparamos estos resultados por los mostrados en la grafica que nos muestra theta respecto a phi apreciamos que ese crecimiento y decrecimiento está relacionado con su el ángulo theta y además comparando el gráfico 1 con el 2 con su evolución temporal. Esto es así por el momento que se produce alrededor del eje Z por las fuerza de inercia que genera el giro theta.

Paso 12. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función `dibu3`.

> `dibu3(15,50);`



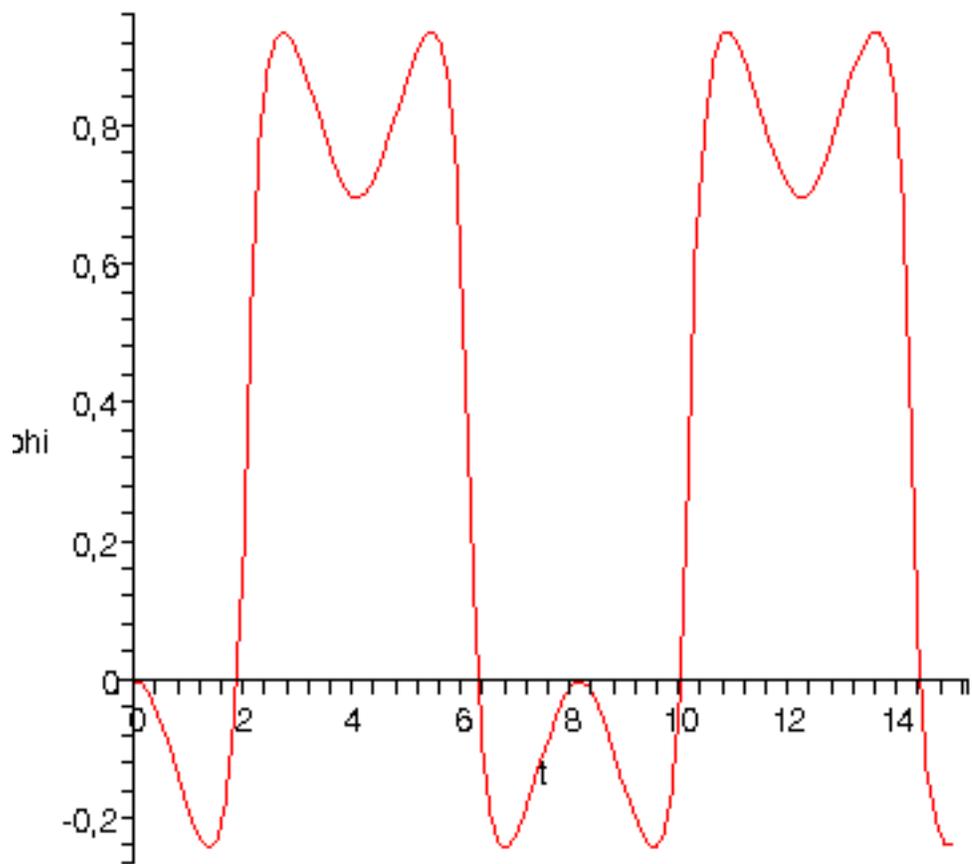
Paso 10 bis. Integración numérica del problema mediante la función `fint` asignando el resultado a la variable `res`.

Si resolvemos este mismo problema para una condiciones iniciales en las que la velocidad de rotación `phi1` inicial sea nula apreciaremos mejor este efecto.

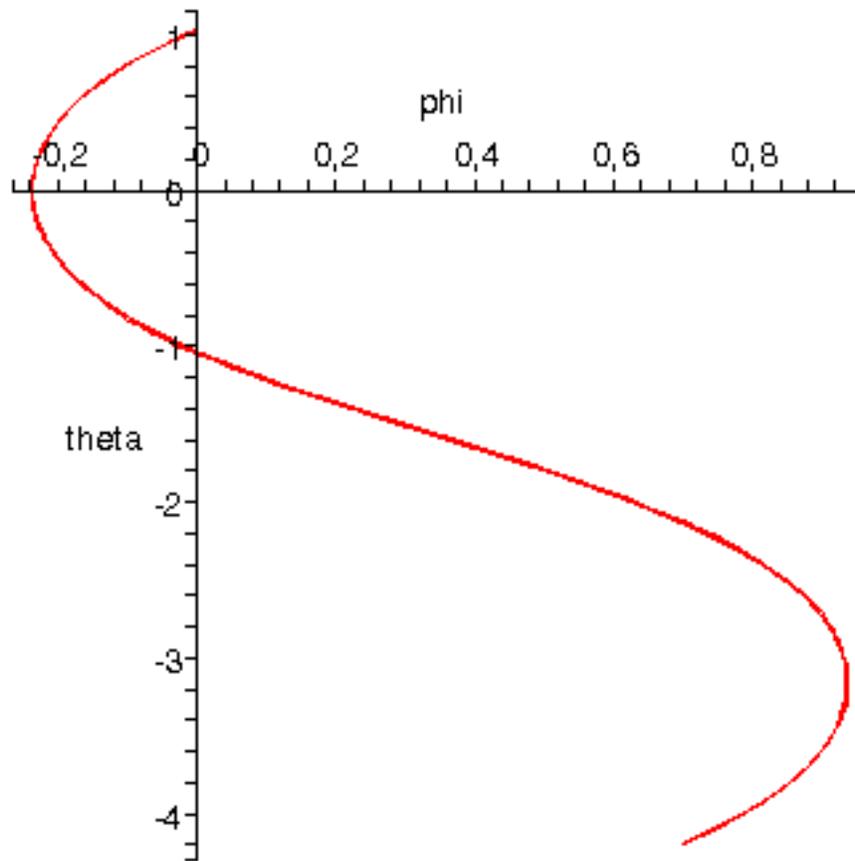
```
> res:=fint([Pi/3,0,0,0]);
```

Paso 11 bis. Representación gráfica de las evoluciones temporales de las variables mediante `odeplot`.

```
> odeplot(res,[t,phi(t)],0..15.,numpoints=100);
```

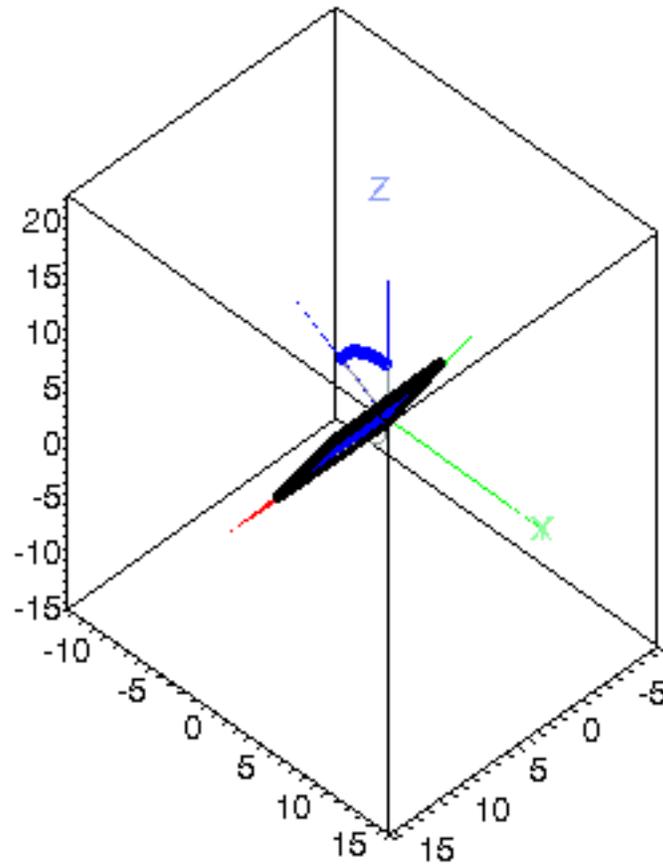


```
> odeplot(res,[phi(t),theta(t)],0..15.,numpoints=100);
```



Paso 12 bis. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función `dibu3`.

```
> dibu3(15,50);
```



Paso 10 bis bis. Integración numérica del problema mediante la función fint asignando el resultado a la variable res.

Finalmente en un caso general, con velocidades iniciales de rotación según ambos ejes.

> res:=fint([Pi/3,0.8,0,0.6]):

Paso 12 bis bis. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función dibu3.

> dibu3(15,50);

