ENUNCIADO DEL EJEMPLO 34

Sistema formado por un aro de masa M y radio R que se encuentra en un plano vertical liso y que tiene un punto de su periferia fijo en el centro de coordenadas y que puede girar respecto a él. El aro tiene ensartada una masa de valor m. Obtener las ecuaciones del movimiento.

```
> restart:
```

Cargamos los paquetes de Maple que vamos a emplear, entre ellos el Mecapac3d, para lo cuál es necesario indicar previamente donde se encuentra la librería dentro del disco duro.

```
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> libname:="C:\",libname:
```

```
> with(mecapac3d):
```

El sistema tiene dos grados de libertad que asociamos con las coordenadas generalizadas theta y phi, que representan el giro de aro en el plano respecto a la normal al mismo y el ángulo que forma con la vertical descendente el radio que une el centro del aro con la partícula, respectivamente. Definimos dichas coordenadas generalizadas.

```
> cg:=[theta,phi] ;
```

$$cg := [\theta, \phi]$$

Definimos las coordenadas del centro de gravedad del aro y su matriz de rotación para definir después el aro. La matriz de rotación se consigue multiplicando por la izquierda las sucesivas matrices al representar giros absolutos.

```
> xaro:=[0,sin(theta),-cos(theta)]:
```

```
> rotaro0:=rota(Pi/2,2):
```

```
> rotaro1:=rota(theta,1):
```

```
> rottot := evalm(rotaro1&*rotaro0) :
```

Definimos el aro

```
> a1:=[aro,xaro,rottot,maro,radaro]:
```

Definimos a continuación las coordenadas de la partícula.

```
> x:=0:
```

```
> y:=sin(theta)+sin(phi):
```

```
> z:=-cos(theta)-cos(phi):
```

Definimos la partícula.

```
> p1:=[punto,x,y,z,mpto]:
```

Definimos elementos gráficos para representar ángulos y los ejes.

```
> angtheta:=[angulo,[0,0,-1],[0,0,0],[0,sin(theta),-cos(theta)],0.5]:
```

```
> angphi:=[angulo,[0,sin(theta),-cos(theta)-1],[0,sin(theta),-cos(theta)],
[0,sin(theta)+sin(phi),-cos(theta)-cos(phi)],0.5]:
```

```
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
```

```
> TY := [texto,[0,2,1],"Y"]:
```

```
> TZ := [texto,[0,0,2.1],"Z"]:
```

```
> ejey:=[segmento,[0,0,0],[0,1,0],green]:
```

```
> ejez:=[segmento,[0,0,0],[0,0,1],red]:
```

Definimos el sistema, con los elementos gráficos incluidos.

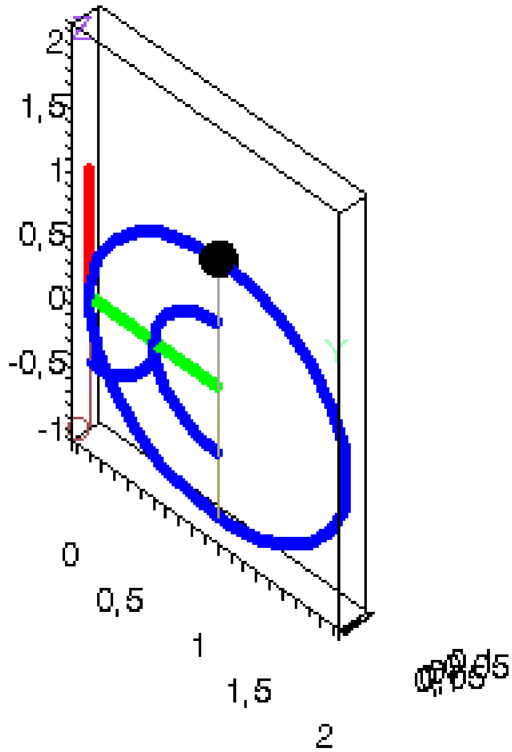
```
> sistema:=[TO,TY,TZ,ejey,ejez,a1,p1,angtheta,angphi];
```

$$sistema = [[texto, [0, 0, -1], "O"], [texto, [0, 2, 1], "Y"], [texto, [0, 0, 2.1], "Z"], [segmento, [0, 0, 0], [0, 1, 0], green], [segmento, [0, 0, 0], [0, 0, 1], red], [aro, [0, \sin(\theta), -\cos(\theta)], rottot, maro, radaro], [punto, 0, \sin(\theta) + \sin(\phi), -\cos(\theta) - \cos(\phi), mpto], [angulo, [0, 0, -1], [0, 0, 0], [0, \sin(\theta), -\cos(\theta)], 0.5], [angulo, [0, \sin(\theta), -\cos(\theta) - 1], [0, \sin(\theta), -\cos(\theta)], [0, \sin(\theta) + \sin(\phi), -\cos(\theta) - \cos(\phi)], 0.5]]$$

Damos valores a los parámetros para poder representar el sistema en una situación determinada y poder realizar después la integración numérica.

```
> maro:=1:g:=9.8:radaro:=1:mpto:=1:
```

```
> fG([evalf(Pi/2),evalf(Pi)]);
```



Calculamos la energía cinética y potencial del sistema, así como la Lagrangiana.

> T:=fT(sistema):

> V:=fV(sistema):

> L:=simplify(T-V);

$$L := 1.500000000\,\theta 1^2 + \cos(\theta)\,\theta 1\,\cos(\phi)\,\phi 1 + \sin(\theta)\,\theta 1\,\sin(\phi)\,\phi 1 + 0.5000000000\,\phi 1^2 + 19.60000000\cos(\theta) + 9.800000000\cos(\phi)$$

Ecuaciones del movimiento

> ecua:=map(ec_l,cg);

$$ecua := \Bigg[$$

$$3.000000000\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right) - \cos(\theta(t))\sin(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)^2 + \cos(\theta(t))\cos(\phi(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)$$

$$+\sin(\theta(t))\cos(\phi(t))\left(\frac{d}{dt}\phi(t)\right)^2+\sin(\theta(t))\sin(\phi(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)+19.60000000\sin(\theta(t)),$$

$$-\sin(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2\cos(\phi(t))+\cos(\theta(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)\cos(\phi(t))+\cos(\theta(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2\sin(\phi(t))$$

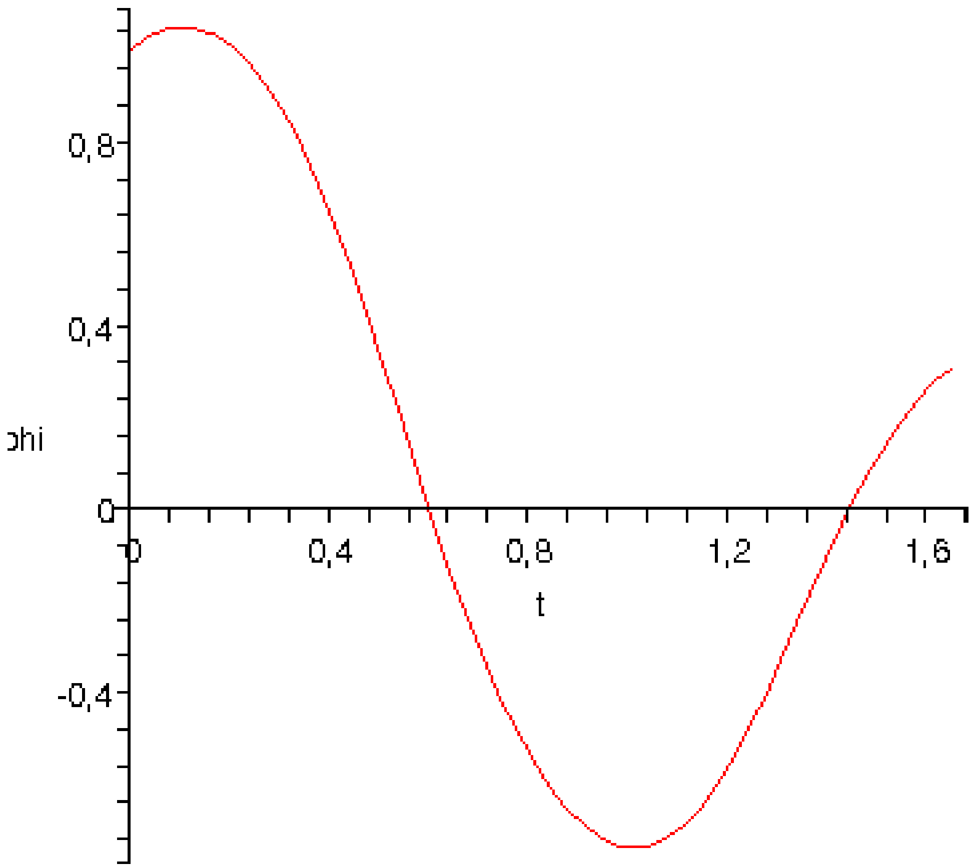
$$+\sin(\theta(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)\sin(\phi(t))+1.000000000\left(\frac{d^2}{dt^2}\phi(t)\right)+9.800000000\sin(\phi(t))\Bigg]$$

Realizamos la integración numérica indicando los valores iniciales de las coordenadas generalizadas y sus velocidades.

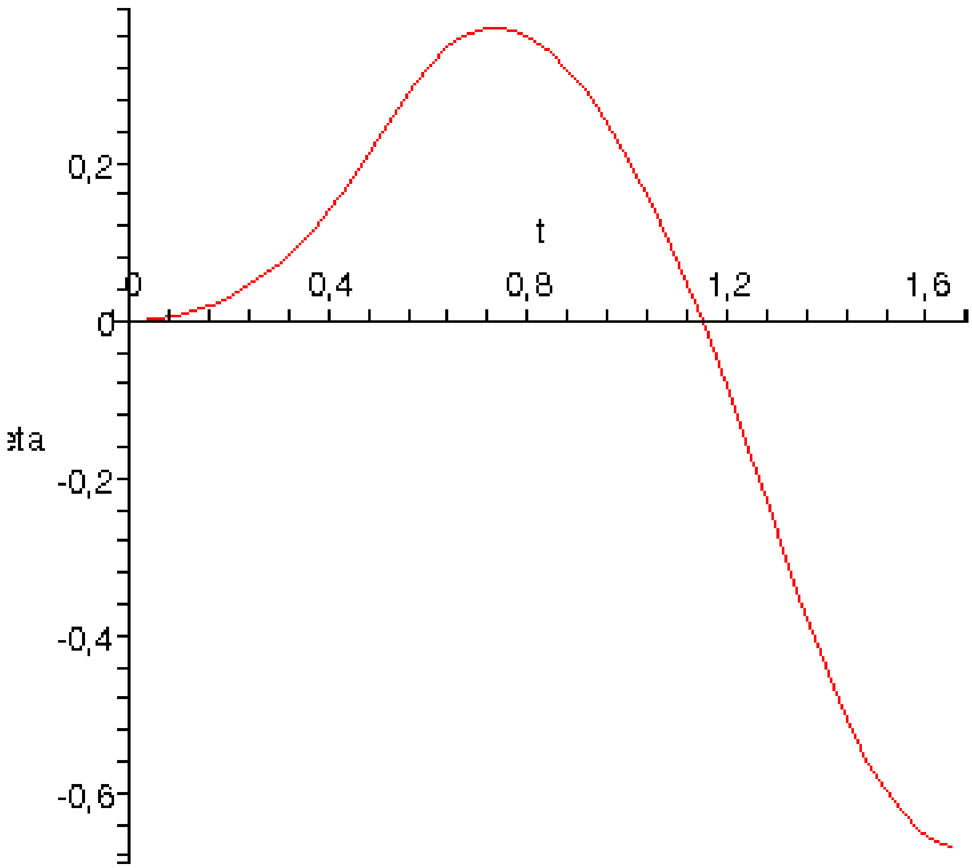
```
> res:=fint([0,0,1,1]):
```

Gráfica de las coordenadas generalizadas en función del tiempo

```
> odeplot(res,[t,phi(t)],0..1.65);
> odeplot(res,[t,theta(t)],0..1.65);
```

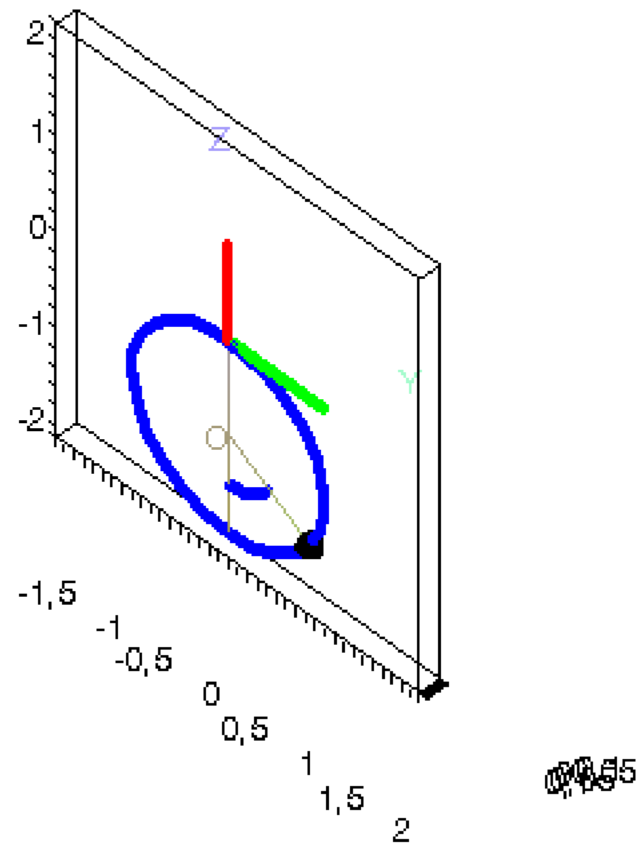


0,8
0,4
phi
0
-0,4
0
0,4
0,8
1,2
1,6
t



Animación del movimiento

```
> dibu3(2,15);
```



2
1
0
-1
-2
Z
Y
O
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2

>