ENUNCIADO EJEMPLO 7

Un sólido rígido está formado por un disco pesado con centro en el punto A, de radio R y masa M y una varilla OA de masa m de longitud $2r$ que se encuentra articulada a un punto fijo O.

El punto A se puede mover libremente en todas las direcciones del espacio. Además, el disco puede girar libremente alrededor de OA.

Paso 0. Reiniciación de las variables del sistema y llamada a los paquetes linalg, plots y plottools.

```
> restart:
```

```
> with(linalg):with(plots):with(plottools):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the name arrow has been redefined
```

```
> libname:="C:/",libname:
```

```
> with(mecapac3d):
```

Paso 1. Definimos las coordenadas generalizadas del sistema en una lista que se denominará cg.. Al moverse A en todo el espacio y O estar fijo tendremos 3 grados de libertad que definiremos a continuación:

```
> cg := [alpha,theta,beta] :
```

Paso 2. Definición mediante variables de los elementos que forman el sistema mecánico, la varilla y el disco.

Para la varilla:

```
> xgv := [r*sin(alpha)*sin(theta),-r*sin(alpha)*cos(theta),r*cos(alpha)];
```

$$xgv := [r\sin(\alpha)\sin(\theta), -r\sin(\alpha)\cos(\theta), r\cos(\alpha)]$$

```
> rotv1 := rota(theta,3);
```

$$rotv1 := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rotv2 := rota(alpha,1);
```

$$rotv2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
> rottotv := evalm(rotv1 &* rotv2);
```

$$rottotv := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\alpha) & \sin(\theta)\sin(\alpha) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\cos(\alpha) & -\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
> v1 := [varilla,xgv,rottotv,mvar,2*r] :
```

A continuación definimos igualmente el disco y sus correspondientes giros:

```
> xgd := 
[2*r*sin(alpha)*sin(theta),-2*r*sin(alpha)*cos(theta),2*r*cos(alpha)];
```

$$xgd := [2\,r\sin(\alpha)\sin(\theta), -2\,r\sin(\alpha)\cos(\theta), 2\,r\cos(\alpha)]$$

```
> rotd1 := rota(theta,3);
```

$$rotd1 := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rotd2 := rota(alpha,1);
```

$$rotd2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
> rotd3 := rota(beta,3);
```

$$rotd3 := \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rottotd := evalm(rotd1 &* rotd2 &* rotd3);
```

$$rottotd := \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\beta) - \sin(\theta)\cos(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\theta)\sin(\beta) - \sin(\theta)\cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\theta)\sin(\alpha) \\ \sin(\theta)\cos(\beta) + \cos(\theta)\cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\theta)\sin(\beta) + \cos(\theta)\cos(\alpha)\cos(\beta) & -\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
> d1:= [disco,xgd,rottotd,mdis,R]:
```

Paso 3. Definición de los elementos gráficos que definiran nuestro sistema de ejes.

```
> TO := [texto,[0,0,-1],"O"]:
> TX := [texto,[5,0,-1],"X"]:
> TY := [texto,[0,5,-1],"Y"]:
```

```
> TZ := [texto,[0,0,6],"Z"]:
> ejex:=[vector,[0,0,0],[5,0,0],red]:
> ejey:=[vector,[0,0,0],[0,5,0],green]:
> ejez:=[vector,[0,0,0],[0,0,5],blue]:
```

Paso 4. Definición de la variable sistema que agrupa en una lista todos los elementos anteriores.

```
> sistema := [v1,ejex,ejey,ejez,d1,TO,TX,TY,TZ]:
```

Paso 5. Obtención de la energía cinética del sistema mediante fT asignándola a la variable T.

```
> T := fT(sistema);
```

$$T := \frac{1}{2}\, mvar\, ((r\cos(\alpha)\,\alpha 1\,\sin(\theta) + r\sin(\alpha)\cos(\theta)\,\theta 1)^2 + (-r\cos(\alpha)\,\alpha 1\cos(\theta) + r\sin(\alpha)\sin(\theta)\,\theta 1)^2 + r^2\sin(\alpha)^2\,\alpha 1^2) + \frac{1}{6}\,\alpha 1^2\, mvar\, r^2 + \frac{1}{6}\sin(\alpha)^2\,\theta 1^2\, mvar\, r^2 + \frac{1}{2}\, mdis((2\,r\cos(\alpha)\,\alpha 1\sin(\theta) + 2\,r\sin(\alpha)\cos(\theta)\,\theta 1)^2 + (-2\,r\cos(\alpha)\,\alpha 1\cos(\theta) + 2\,r\sin(\alpha)\sin(\theta)\,\theta 1)^2 + 4\,r^2\sin(\alpha)^2\,\alpha 1^2) + \frac{1}{8}(\sin(\alpha)\,\theta 1\sin(\beta) + \alpha 1\cos(\beta))^2\, mdisR^2 + \frac{1}{8}(\sin(\alpha)\,\theta 1\cos(\beta) - \alpha 1\sin(\beta))^2\, mdisR^2 + \frac{1}{4}(\beta 1 + \cos(\alpha)\,\theta 1)^2\, mdisR^2$$

Paso 6. Obtención de la energía potencial del sistema mediante fV asignándola a la variable V

```
> V := fV(sistema);
```

$$V := mvar\, g\, r\cos(\alpha) + 2\, mdisg\, r\cos(\alpha)$$

Paso 7. Obtención de la lagrangiana como diferencia de energías entre la energía cinética y la potencial.

```
> L := simplify(T-V);
```

$$L := \frac{1}{2}\, mdisR^2\,\beta 1\cos(\alpha)\,\theta 1 + \frac{2}{3}\,\alpha 1^2\, mvar\, r^2 + 2\, mdisr^2\,\theta 1^2 - \frac{2}{3}\, mvar\, r^2\,\theta 1^2\cos(\alpha)^2 - 2\, mdisr^2\,\theta 1^2\cos(\alpha)^2 + 2\, mdisr^2\,\alpha 1^2 + \frac{1}{8}\, mdisR^2\,\alpha 1^2 + \frac{1}{4}\, mdisR^2\,\beta 1^2 - mvar\, g\, r\cos(\alpha) - 2\, mdisg\, r\cos(\alpha) + \frac{1}{8}\, mdisR^2\cos(\alpha)^2\,\theta 1^2 + \frac{2}{3}\, mvar\, r^2\,\theta 1^2 + \frac{1}{8}\, mdisR^2\,\theta 1^2$$

Paso 8. Obtención de las ecuaciones de lagrange para las dos coordenadas generalizadas mediante el operador Ec_lag

```
> ecua := simplify(ec_lag());
```

$ecua :=$

$$
\frac{4}{3}\left(\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)\right) mvar\, r^2 + 4\, mdis\, r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)\right) + \frac{1}{4}\, mdis\, R^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t)\right)
+ \frac{1}{2}\, mdis\, R^2\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) - \frac{4}{3}\, mvar\, r^2\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2\cos(\alpha(t))\sin(\alpha(t))
- 4\, mdis\, r^2\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2\cos(\alpha(t))\sin(\alpha(t)) - mvar\, g\, r\sin(\alpha(t)) - 2\, mdis\, g\, r\sin(\alpha(t))
+ \frac{1}{4}\, mdis\, R^2\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2\sin(\alpha(t)),
$$

$$
\frac{1}{2}\, mdis\, R^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\beta(t)\right)\cos(\alpha(t)) - \frac{1}{2}\, mdis\, R^2\left(\frac{d}{dt}\beta(t)\right)\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) + 4\, mdis\, r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)
- \frac{4}{3}\, mvar\, r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)\cos(\alpha(t))^2 + \frac{8}{3}\, mvar\, r^2\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\cos(\alpha(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)
- 4\, mdis\, r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)\cos(\alpha(t))^2 + 8\, mdis\, r^2\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\cos(\alpha(t))\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)
- \frac{1}{2}\, mdis\, R^2\cos(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right) + \frac{1}{4}\, mdis\, R^2\cos(\alpha(t))^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right)
+ \frac{4}{3}\, mvar\, r^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right) + \frac{1}{4}\, mdis\, R^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right),
$$

$$
-\frac{1}{2}\, mdis\, R^2\left(\sin(\alpha(t))\left(\frac{d}{dt}\alpha(t)\right)\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) - \cos(\alpha(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right) - \left(\frac{d^2}{dt^2}\beta(t)\right)\right)\Bigg]
$$

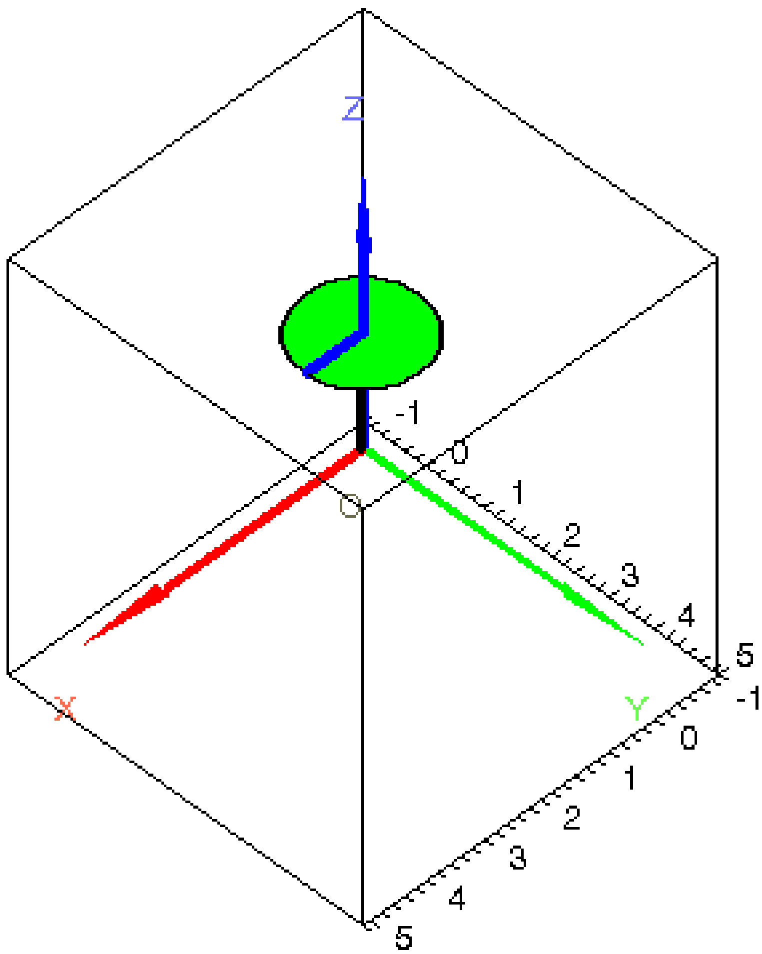
Paso 9. Asignación de valores numéricos a los parámetros que queden sun asignar para poder proceder a la integración numérica.

```
> mvar:=1: g:=9.8: mdis:=10: r:=1: R:=1:
```

Paso 10. Visualizamos la configuracion del sistema para distintas posiciones:

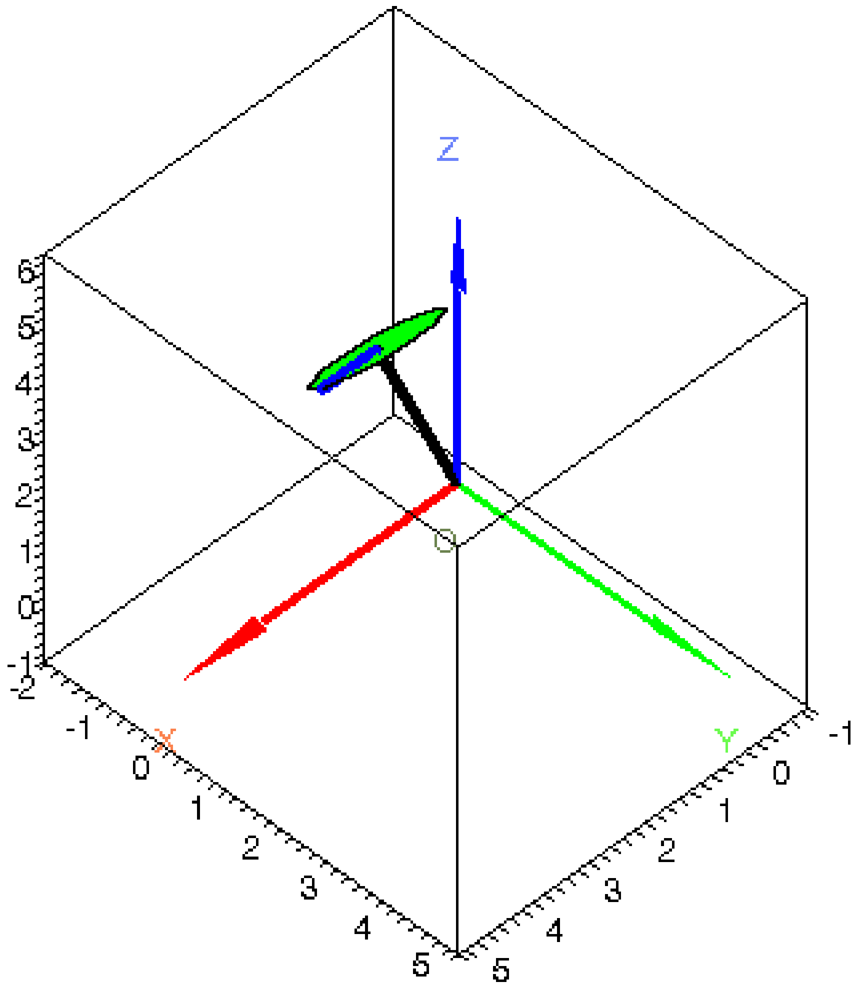
Posición en el instante inicial

> fG([evalf(0),evalf(0),evalf(0)]);



En una posición generica

> fG([evalf(Pi/4),evalf(0/4),evalf(0/4)]);

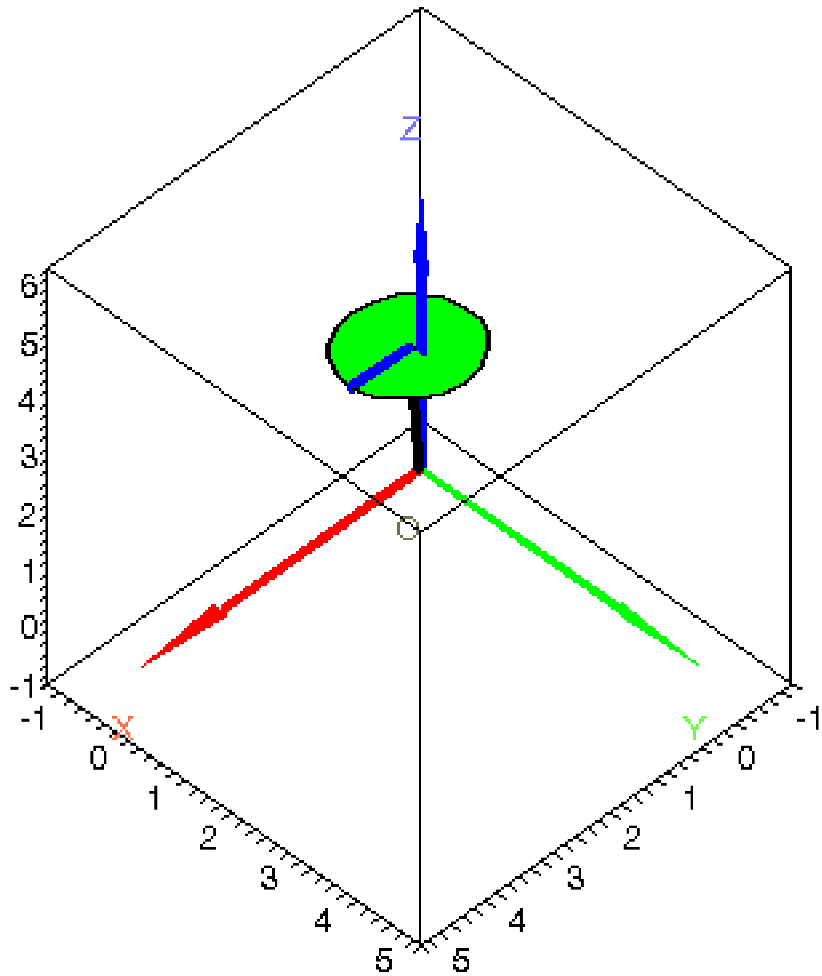


Paso 11. Integración numérica del problema mediante la función fint asignando el resultado a la variable res.

```
> res := fint([0.1,0,0,0,0,50]):
```

Paso 12. Procedemos a realizar una animación del movimiento del conjunto por medio de la función dibu3.

```
> dibu3(6,70);
```


Z
X
Y
O
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
-1
0
1
2
3
4
5

>