Ingeniero Geólogo - Universidad Politécnica de Madrid

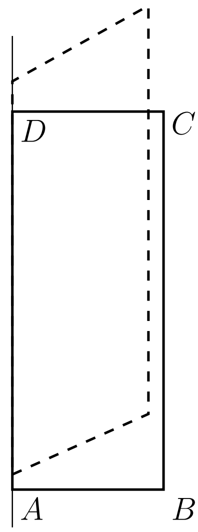
Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (1 de febrero de 2003)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un bloque de caucho $ABCD$ de dimensiones 200 mm × 500 mm (figura) tiene su borde AD sobre una pared vertical, y sobre él actúan fuerzas que le producen una deformación plana homogénea con los siguientes desplazamientos (en mm):



$$\{\boldsymbol{u}_A\} = (0, 1)^{\mathrm{T}} \qquad \{\boldsymbol{u}_B\} = (-1, 5)^{\mathrm{T}}$$
$$\{\boldsymbol{u}_C\} = (-1, 6)^{\mathrm{T}} \qquad \{\boldsymbol{u}_D\} = (0, 2)^{\mathrm{T}}$$

Se supondrá que las deformaciones son pequeñas. El material es elástico lineal, con módulo de Young $E = 10^4$ Pa y coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}4$. Se pide:

1. Tensor de deformaciones (componentes cartesianas).
2. Deformación volumétrica y desviadora.
3. Deformación normal según la dirección de AC.
4. Componentes del tensor de Tensiones
5. Reacciones transmitidas por el borde AD a la pared vertical.

⋆

1.— Al tratarse de una deformación homogénea, el campo de desplazamientos es lineal, por lo que sus componentes serán funciones del tipo:

$$u_x(x,y) = u_{0x} + \alpha_1 x + \alpha_2 y \ ; \tag{1}$$
$$u_y(x,y) = u_{0y} + \alpha_3 x + \alpha_4 y \ . \tag{2}$$

Estas funciones dependen de 6 coeficientes $(u_{0x}, \alpha_1, \alpha_2, u_{0y}, \alpha_3, \alpha_4)$. Para determinarlos basta con obligar a que las ecuaciones (1) y (2) se cumplan para 3 de los puntos del cuerpo, por ejemplo A, B, C. Haciendo esto se obtiene:

$$u_{0x} = 0,\ \alpha_1 = -\frac{5}{1000},\ \alpha_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_x(x,y) = -\frac{5}{1000}x \ ; \tag{3}$$
$$u_{0y} = 1,\ \alpha_3 = \frac{2}{100},\ \alpha_4 = \frac{2}{1000} \quad \Rightarrow \quad u_y(x,y) = 1 + \frac{2}{100}x + \frac{2}{1000}y \ . \tag{4}$$

De esta forma, derivando se obtienen las componentes del tensor de deformaciones lineal:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{5}{1000} \ ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{2}{1000} \ ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}) = \frac{1}{100} \ ;$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} -5\cdot 10^{-3} & 10\cdot 10^{-3} \\ 10\cdot 10^{-3} & 2\cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \ .$$

2.— la deformación volumétrica es

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{pp} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = -3 \cdot 10^{-3} \ ,$$

mientras que la desviadora resulta

$$[\boldsymbol{\varepsilon}'] = [\boldsymbol{\varepsilon}] - \frac{1}{3}\varepsilon_v[\mathbf{1}] = \begin{pmatrix} -4 \cdot 10^{-3} & 10 \cdot 10^{-3} \\ 10 \cdot 10^{-3} & 3 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \ .$$

3.— Según la dirección de $\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|\boldsymbol{u}_{AC}$. la deformación es $\boldsymbol{u}_{AC} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{u}_{AC}) = (230/29) \cdot 10^{-3} = 7{,}93 \cdot 10^{-3}$.

4.— Las tensiones se pueden calcular a partir de la ley de Hooke generalizada,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{pp} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \ ,$$

con lo que

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} \ ; \quad \sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} \ ; \quad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \ .$$

Teniendo en cuenta que las constantes de Lamé valen

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 14285{,}7\,\mathrm{Pa} \ ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 3571{,}43\,\mathrm{Pa} \ ,$$

resulta

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} -78{,}5714 & 71{,}4285 \\ 71{,}4285 & -28{,}5714 \end{pmatrix} \ (\mathrm{Pa}).$$

5.— Para calcular las reacciones basta multiplicar por las dimensiones del lado:

$$N = \sigma_{11} \cdot \overline{AD} = -78{,}5714 \cdot 0{,}5 = -39{,}2857\,\mathrm{N} \ ;$$
$$T = \sigma_{12} \cdot \overline{AD} = 71{,}4285 \cdot 0{,}5 = 35{,}7142\,\mathrm{N} \ .$$