INGENIERO GEÓLOGO - UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

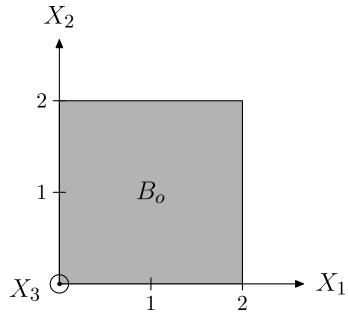
Mecánica de Medios Continuos

EXAMEN PARCIAL (30 de enero de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un paralelepípedo deformable de dimensiones 2x2x1 se encuentra en su configuración de referencia en la posición que indica la figura. Este cuerpo se somete a una deformación:



$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t) = -e^{X_2 t}\boldsymbol{E}_1 + tX_1^2\boldsymbol{E}_2 + X_3\boldsymbol{E}_3,$$

siendo (X_1, X_2, X_3) las coordenadas materiales y t el tiempo. Para este cuerpo se pide:

1. Calcular la matriz correspondiente al gradiente de deformaciones $\boldsymbol{F}$, en todo punto X e instante t.

2. Lo mismo para el tensor de deformación de Cauchy-Green $\boldsymbol{C}$. ¿Cuáles son los alargamientos principales?

3. Calcular también las matrices correspondientes al tensor (derecho) de alargamiento $\boldsymbol{U}$ y al tensor de rotación $\boldsymbol{R}$. Comprobar que este último es un tensor ortogonal.

4. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo deformado en el instante $t = 1$?

⋆

1) El gradiente de deformaciones está definido como $\boldsymbol{F} = \mathrm{GRAD}[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}, t)]$.
La matriz correspondiente a dicho tensor tiene por componentes $F_{ij} = \frac{\partial \varphi_i}{X_j}$, que para la deformación planteada resulta

$$[\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 0 & -te^{X_2 t} & 0 \\ 2tX_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) El tensor (derecho) de Cauchy-Green se define como $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$, y su matriz de componentes es

$$[\boldsymbol{C}] = [\boldsymbol{F}]^T[\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 4t^2X_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & t^2\mathrm{e}^{2X_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Los alargamientos principales son las raíces cuadradas positivas de los autovalores de $\boldsymbol{C}$. Como el tensor de Cauchy-Green es diagonal, sus autovalores coinciden con los términos en la diagonal principal y así pues:

$$\lambda_1 = +\sqrt{4t^2X_1^2} = 2tX_1, \quad \lambda_2 = +\sqrt{t^2\mathrm{e}^{2X_2 t}} = te^{X_2 t}, \quad \lambda_3 = +\sqrt{1} = 1 \ .$$

Los alargamientos principales corresponden a un cociente de longitudes antes y después de la deformación así que sólo tiene sentido que tengan valor positivo.

3) El tensor (derecho) de alargamientos $\boldsymbol{U}$ es el tensor tal que $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{C}$, y cuyos autovalores son los alargamientos principales. Dada la forma tan sencilla del tensor de Cauchy-Green su raíz cuadrada se puede obtener directamente:

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2tX_1 & 0 & 0 \\ 0 & t\mathrm{e}^{X_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

La matriz de rotación $\boldsymbol{R}$ es, por definición, la matriz ortogonal que resulta de la descomposición polar del gradiente de deformaciones. Es decir, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$. Como conocemos la matriz de componentes de $\boldsymbol{F}$ y de $\boldsymbol{U}$, la matriz de rotación se puede calcular de la siguiente manera:

$$[\boldsymbol{R}] = [\boldsymbol{F}][\boldsymbol{U}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -t\mathrm{e}^{X_2 t} & 0 \\ 2tX_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2tX_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t\mathrm{e}^{X_2 t}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Nótese que, como la matriz $[\boldsymbol{U}]$ es diagonal, su inversa también lo es y se puede calcular invirtiendo cada uno de los términos de la diagonal. Además, la matriz $[\boldsymbol{R}]$ es ortogonal, puesto que $[\boldsymbol{R}] \cdot [\boldsymbol{R}]^T = [\mathbf{1}]$ y $\det[\boldsymbol{R}] = +1$.

4) Para calcular el cambio de volumen del paralelepípedo en el instante $t = 1$ recordamos que la fórmula que relaciona el diferencial de volumen deformado y sin deformar es $dv = J\,dV$, siendo $J = \det(\boldsymbol{F})$. Para la deformación del problema el jacobiano tiene valor $J = 2t^2 X_1 \mathrm{e}^{X_2 t}$, que en el instante $t = 1$ es igual a $J = 2X_1 \mathrm{e}^{X_2}$.

Para calcular el volumen del paralelepípedo deformado basta con sumar (integrar) todos los volúmenes diferenciales que lo componen. Es decir,

$$volumen = \int dv = \int J\,dV = \int_{X_1=0}^{2} \int_{X_2=0}^{2} \int_{X_3=0}^{1} 2X_1 \mathrm{e}^{X_2} dX_3\,dX_2\,dX_1 = 4(\mathrm{e}^2 - 1) .$$

Es importante tener en cuenta que la deformación $\boldsymbol{\varphi}$ *no es homogénea* así que el volumen del paralelepípedo deformado no es J veces el volumen del paralelepípedo sin deformar.