MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

Problemas Tema 5: Ecuaciones de Balance — Curso 2005-06

Problema 1.— Se considera la deformación

$$\boldsymbol{\varphi}(X_1, X_2, X_3, t) = X_1(1+t)\boldsymbol{E}_1 + e^t X_2 \boldsymbol{E}_2,$$

definida sobre un cuerpo plano, rectangular con vértices situados en los puntos

$$A \equiv (0,0), \qquad B \equiv (1,0), \qquad C \equiv (0,2), \qquad D \equiv (1,2)$$

en su configuración de referencia. Para dicho movimiento se pide:

1. Calcular la velocidda material $\boldsymbol{V}(X_1, X_2, X_3, t)$ y la velocidad espacial $\boldsymbol{v}(x_1, x_2, x_3, t)$.
2. Calcular la aceleración material $\boldsymbol{A}(X_1, X_2, t)$.
3. Calcular la aceleración espacial a partir de la aceleración material y la deformación inversa $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\varphi}^{-1}(x_1, x_2, x_3, t)$.
4. Calcular la aceleración espacial mediante la fórmula

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \mathbf{grad}[\boldsymbol{v}] \cdot \boldsymbol{v},$$

   acomprobando que el resultado es el mismo que en el apartado anterior.

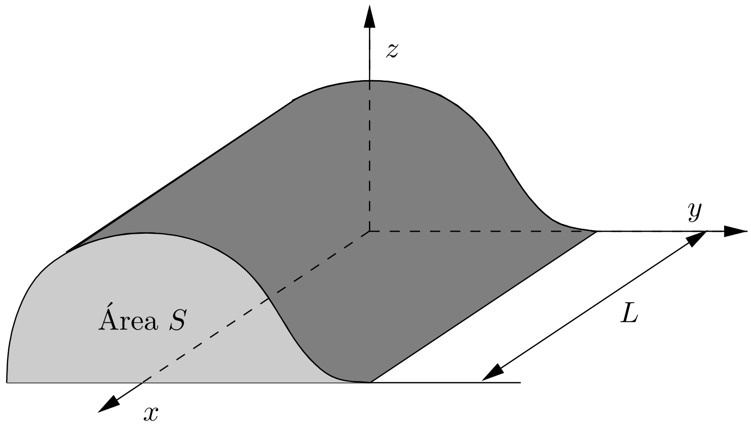
5. Dibujar el cuerpo deformado en los instantes $t = 0, 1, 2$ y en cada uno de esos instantes la curva material que coincide con la diagonal AD en la configuración de referencia.

Problema 2.— Sea un fluido con el siguiente campo de velocidades:

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = f(x,y)\, z.$$

Se pide:

1. Determinar el valor de la densidad del fluido en todo instante sabiendo que en $t = 0$, $\rho = f(x,y)$.
2. Supuesto $f(x,y) = A$, siendo A una constante, en el instante $t = 1$ se vierte un colorante en los puntos de una superficie esférica de centro $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ y radio R. Obtener la ecuación de la mancha a lo largo del tiempo.
3. Bajo el mismo supuesto del apartado anterior, $f(x,y) = A$, calcular la cantidad de masa por unidad de tiempo que atraviesa la superficie cilíndrica de la figura, cuya generatriz contenida en el plano xy tiene longitud L.



Problema 3.—

1. Demostrar que el campo de velocidades $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^3$, siendo A una constante arbitraria, satisface la ecuación de continuidad de un flujo incompresible.

2. En un determinado punto de un cuerpo, los tensores de velocidad de deformación y tensión tienen, respectivamente, las componentes

$$[\boldsymbol{d}] = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{s}^{-1} \qquad \text{y} \qquad [\boldsymbol{\sigma}] = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \mathrm{Pa}\,.$$

   Obtener el valor de la potencia tensional específica (por unidad de volumen) en ese punto.

3. Un fluido perfecto está caracterizado por la ecuación constitutiva $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$, siendo p la presión. Demostrar que la potencia tensional específica puede expresarse como $p\dot{\rho}/\rho$, siendo ρ la densidad.