

LA CONSIDERACIÓN DE LOS FENÓMENOS DINÁMICOS EN EL PROYECTO DE PUENTES FERROVIARIOS

José M.^a Goicolea Ruigómez

Grupo de Mecánica Computacional, Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos,
Universidad Politécnica de Madrid, <http://w3.mecanica.upm.es>

Resumen

En primer lugar se resume la naturaleza e importancia de los fenómenos dinámicos en puentes de ferrocarril, concretamente los debidos al tráfico de alta velocidad. Se explica el fenómeno de impacto debido a una carga móvil y la resonancia para un tren de cargas. A continuación se ofrece una descripción y discusión resumida de las características básicas de los diversos métodos de cálculo dinámico, incluyendo su consideración en las actuales instrucciones de acciones para proyecto. Posteriormente se discuten algunos condicionantes básicos de la respuesta dinámica, referidos tanto a los tipos de trenes como a las características de los puentes. Por último se discuten algunas aplicaciones significativas en diversos casos prácticos.

PALABRAS CLAVE: *Dinámica de puentes de ferrocarril, alta velocidad ferroviaria, resonancia, coeficiente de impacto, impronta dinámica, interacción vehículo–estructura.*

Abstract

Firstly the nature and relevance of dynamic effects in railway bridges is discussed, particularly with respect to high-speed traffic actions. The impact phenomenon due to a moving load and the resonance for a train of loads is discussed. Following the available methods for dynamic analysis are discussed, including their consideration in the current engineering codes. Next some basic concepts which condition the dynamic response are discussed, including those resulting from the different types of trains as well as those related to the bridges themselves. Finally some representative applications to practical design situations are presented and discussed.^o This is the english abstract.

KEYWORDS: *Dynamics of railway bridges, high-speed railways, impact coefficient, dynamic signature, vehicle–structure interaction.*

1. Introducción: impacto dinámico y resonancia

Los efectos dinámicos debidos a las cargas móviles de los trenes constituyen una de las acciones de mayor relevancia en el proyecto de puentes de ferrocarril. La importancia de la respuesta dinámica ha sido conocida desde los inicios del ferrocarril. La solución de la carga móvil sobre una viga fue obtenida ya en 1905 por Kryloff [15] y está descrita por Timoshenko en 1928 [20]. Más recientemente, los trabajos de Fryba [9, 10] han recopilado modelos y aspectos muy diversos de la dinámica de puentes de ferrocarril. Por último, deben citarse las contribuciones realizadas en nuestro país por Alarcón [1, 2].

Las normas existentes hasta ahora [21, 3, 12] para el cálculo de los puentes de ferrocarril tienen en cuenta la respuesta dinámica a través de una *coeficiente de impacto*, que representa el aumento de la respuesta dinámica respecto a la estática para una *única carga móvil*. En [21] el incremento dinámico se calcula mediante un factor $\varphi'(v)$ que depende de la velocidad y adquiere un valor máximo de $\varphi' = 1,32$ (sin considerar irregularidades de la vía). El coeficiente de impacto se calculará al final como la envolvente

$$\Phi = \text{máx}(1 + \varphi' + \varphi''), \quad (1)$$

donde este último sumando (φ'') responde al efecto de las irregularidades de la vía.

Como ejemplo representativo, consideremos el caso de una carga puntual de 195 kN, correspondiente a un eje de la locomotora del tren de alta velocidad ICE2, que atraviesa un puente isostático de luz $L = 15$ m con velocidad constante. El resto de las características del puente son la masa por unidad de longitud $\bar{m} = 15$ t/m, rigidez a flexión $EI = 7694081$ kN/m², frecuencia fundamental (primer modo de vibración) $f_0 = 5$ Hz y tasa de amortiguamiento $\zeta = 2\%$. Este puente pertenece al catálogo de puentes isostáticos empleado por el ERRI en [18]. El resultado del cálculo dinámico puede verse en la figura 1: a la velocidad $v = 220$ km/h resulta una flecha dinámica máxima de 2,80 mm, mientras que a la velocidad $v = 360$ km/h la máxima flecha dinámica es algo mayor, 3,00 mm. Teniendo en cuenta que la flecha estática es $\delta_{\text{est}} = PL^3/(48EI) = 1,78$ mm, esto equivale a un coeficiente de impacto $\Phi_{\text{real}} = 1,69$. Este coeficiente de impacto está cubierto por el valor de diseño prescrito en [21], que para este caso resulta (sin considerar el efecto de las irregularidades φ'') $\Phi_{\text{UIC}} = 1 + \varphi' = 2,16 > 1,69$.

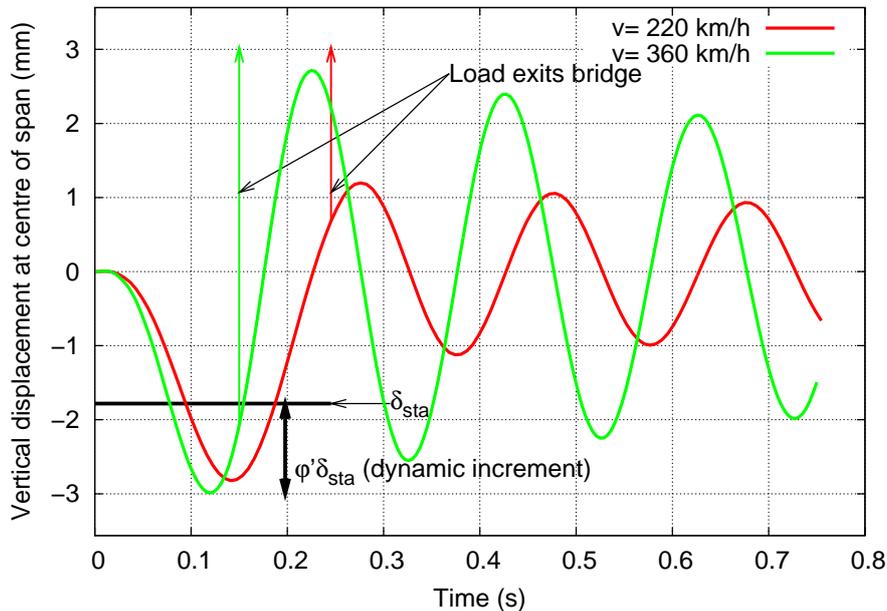


Figura 1: Respuesta dinámica de puente isostático ERRI $L = 15$ m bajo carga móvil aislada, $P = 195$ kN, a las velocidades de 220 km/h y 360 km/h

En el ejemplo anterior se comprueba que la consideración del coeficiente de impacto Φ es suficiente para tener en cuenta el efecto dinámico de una única carga móvil. Consideramos ahora el efecto de un tren completo sobre el mismo puente, en concreto el tren Talgo de alta velocidad. En la figura 2 se muestran los desplazamientos obtenidos en función del tiempo para una velocidad 360 km/h, incluyendo para comparación la respuesta que se obtendría en el caso cuasi-estático, es decir sin considerar el efecto de vibración del puente. Se observa un incremento notable de la

respuesta, aunque en cualquier caso queda cubierto ampliamente por las solicitaciones estáticas del tren tipo UIC71, que como se sabe es una envolvente de cargas y proporciona unas acciones notablemente mayores que las de los trenes reales de alta velocidad.

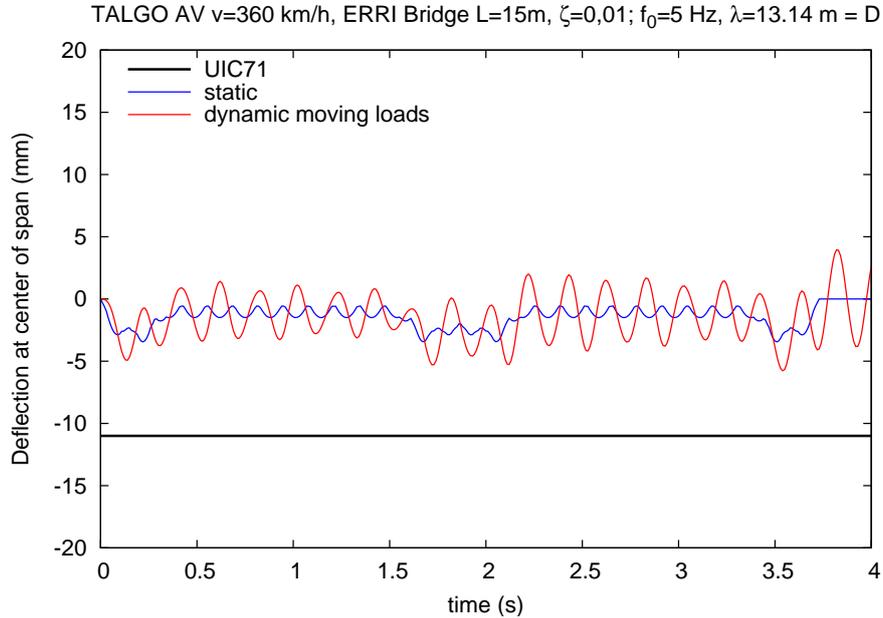


Figura 2: Talgo sobre puente ERRI $L = 15$ a velocidad $v = 360$ km/h, no resonante. Historia de desplazamiento en centro de vano.

Si realizamos el cálculo a la velocidad (menor) $v = 236,5$ km/h se obtiene sorprendentemente el resultado de la figura 3. Se comprueba que en este caso el incremento dinámico es mucho mayor, debido a un efecto resonante que hace que la amplitud de oscilación crezca en cada ciclo. Lo preocupante en este caso es que ya no queda cubierto por la sollicitación del tren de cargas tipo UIC71.

La interpretación de este fenómeno resonante es sencilla: la frecuencia de aplicación de las cargas cíclicas debidas a los ejes para $v = 236,5$ km/h, con el espaciamiento uniforme de los ejes del talgo $D_k = 13,14$ m, es $f_p = v/D_k = 5$ Hz. La coincidencia de esta frecuencia de excitación con la de vibración fundamental del puente ($f_p = f_0 = 5$ Hz) determina la resonancia.

Otra manera (equivalente) de interpretar la resonancia es mediante la denominada *longitud de onda* de la excitación, $\lambda = v/f_0$. La resonancia puede producirse cuando la longitud característica D_k de separación de los ejes coincida con un múltiplo entero de dicha longitud de onda:

$$D_k = i \cdot \lambda, \quad i = 1, 2, \dots \Rightarrow \text{resonancia} \quad (2)$$

En nuestro caso, para $v = 236,5$ km/h resulta $\lambda = 13,14$ m, por lo que la condición anterior se cumple con claridad al coincidir con la distancia regular entre ejes D_k .

El ejemplo anterior sirve para comprobar que el coeficiente de impacto Φ no tiene en cuenta la posible resonancia que se produciría por la repetición cíclica de cargas. Sin embargo, a este respecto hay que mencionar que para las frecuencias de vibración y distancias entre ejes de los trenes reales circulantes la resonancia no ha sido un fenómeno que se diera en la práctica. . . ¡hasta la aparición de la alta velocidad!

En efecto, por encima de las velocidades de 200 ó 220 km/h, para las distancias entre ejes de los coches ferroviarios reales (entre 13 y 26 m) —que para una velocidad determinada son las que determinan la frecuencia de repetición de las cargas—, pueden empezar a aparecer fenómenos

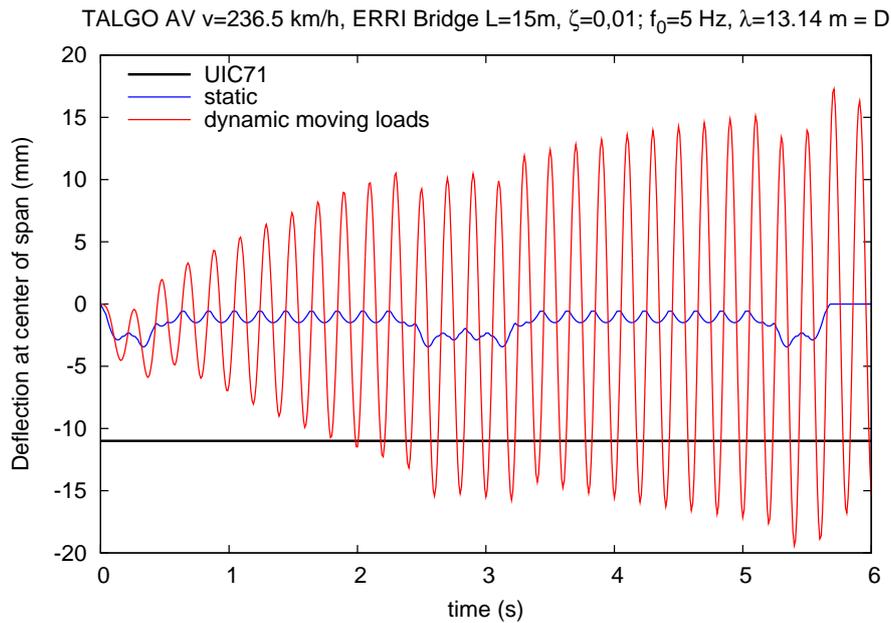


Figura 3: Talgo sobre puente ERRI $L = 15$ a velocidad $v = 236,5$ km/h, resonante. Historia de desplazamiento en centro de vano.

resonantes. Como ejemplo real, en la figura 4 se muestran las mediciones resonantes observadas en el viaducto del Tajo para el tren AVE a una velocidad de 219 km/h [13]. En [6] se discute con mayor detalle este caso, realizándose el cálculo con un modelo dinámico simple que coincide de forma muy aproximada con la medición experimental (figura 5). Estas mediciones resonantes habrían resultado mucho más acusadas de tratarse de un tren de doble composición, con mayor número de ejes. El viaducto del Tajo en la línea del AVE consta de vanos isostáticos con $L = 38$ m, cuya frecuencia fundamental es $f_0 = 3,31$ Hz. Por tanto, a la velocidad citada la longitud de onda de excitación es $\lambda = 18,4$ m, muy próxima a la distancia característica entre bogies del AVE, $D_k = 18,7$ m.

En resumen, la resonancia en puentes de ferrocarril, a pesar de constituir un fenómeno clásico de respuesta dinámica, ha permanecido ausente hasta el momento de las normas de cálculo. En consecuencia, no ha sido tenido en cuenta en el proyecto, salvo por el margen que proporcionan los coeficientes de seguridad. Esta ausencia se soluciona con las instrucciones de cálculo más recientes, entre las que cabe destacar el nuevo Eurocódigo 1 [7] y el nuevo borrador Español IAPF [11].

En lo que resta de este artículo se ofrece en primer lugar una descripción de las características básicas de los diversos métodos de cálculo dinámico, incluyendo su consideración en las actuales instrucciones de acciones para proyecto (apartado 2). A continuación en el apartado 3 se describe la influencia de las características de los trenes y puentes en la respuesta dinámica. En el apartado 4 se discuten algunas aplicaciones en casos prácticos. Por último, en el apartado 5 se resumen algunas observaciones finales.

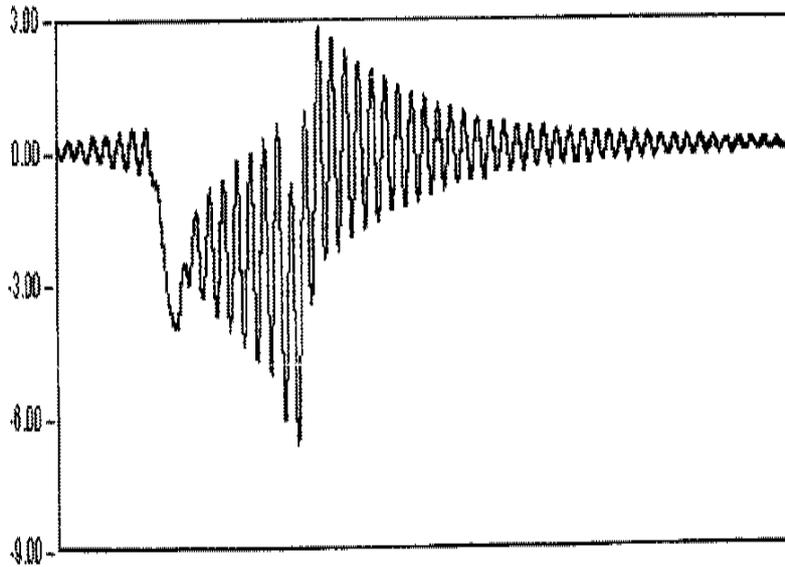


Figura 4: *Desplazamientos medidos en el Viaducto del Tajo (Línea AV Madrid-Sevilla) al paso del AVE (composición simple) con $v = 219\text{km/h}$ [13].*

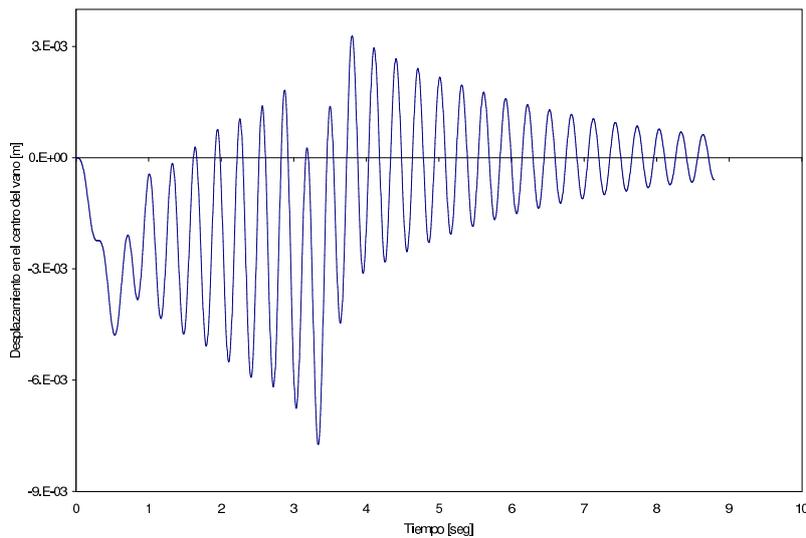


Figura 5: *Desplazamientos obtenidos con un modelo de integración directa en el tiempo con cargas móviles en el Viaducto del Tajo, para una velocidad de paso del AVE (composición simple), $v = 219\text{km/h}$.*

2. Métodos de cálculo

2.1. Cálculo estático y coeficiente de impacto

Como ya se ha comentado, este procedimiento no requiere la realización de un cálculo dinámico como tal, sino que se basa en la aplicación del coeficiente de impacto al resultado del cálculo estático. La definición básica de este coeficiente propuesta en [21] es la detallada más arriba en la ecuación 1. En ella el término φ' corresponde al incremento dinámico en una vía ideal, calculándose como

$$\varphi' = \frac{K}{1 - K + K^4}, \quad (3)$$

siendo $K = v/(2f_0L)$, v la velocidad del tren, f_0 la primera frecuencia fundamental de vibración del puente y L la luz del vano en el caso estar simplemente apoyado o en otro caso la longitud equivalente. A su vez, el término φ'' determina el efecto de las irregularidades que vale

$$\varphi'' = \frac{a}{100} \left[56e^{-\left(\frac{L}{10}\right)^2} + 50 \left(\frac{f_0L}{80} - 1 \right) e^{-\left(\frac{L\Phi}{20}\right)^2} \right], \quad (4)$$

siendo $a = \min\left(\frac{v}{22}, 1\right)$, con la velocidad v expresada en m/s.

El coeficiente tal y como se ha definido 1 se aplicaría a las cargas de los trenes reales en circulación, cada uno a la velocidad máxima correspondiente, que será menor lógicamente para los trenes de mercancías que para los trenes más ligeros de pasajeros. Para simplificar la consideración de los tipos de trenes se establece en [21] un tren tipo envolvente denominado «UIC-71», formado por cuatro cargas de 250 kN y una carga repartida ilimitada de 80 kN/m. Este tren tipo puede representar acciones más de tres veces mayores que las de los trenes ligeros de pasajeros de alta velocidad. Finalmente, se establece un coeficiente de impacto envolvente que se aplicará sobre las acciones de este tren tipo UIC71, cuyo valor en caso de vía bien mantenida es

$$\Phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{L\Phi} - 0,2} + 0,82; \quad \Phi_2 \geq 1. \quad (5)$$

La aplicación del coeficiente de impacto está sujeto a algunas restricciones, con objeto de que responda a las situaciones reales de puentes y de trenes para las que fue formulado y comprobada su validez. En concreto, la frecuencia fundamental debe cumplir determinadas condiciones detalladas en [21]. Sin embargo, el condicionante más importante es la limitación de su uso para velocidades $v \leq 200$ km/h, ya que se considera que por encima de dicho límite pueden aparecer fenómenos resonantes, no considerados en este coeficiente. Para este caso se debe emplear alguno de los métodos descritos a continuación.

2.2. Cálculo dinámico con cargas móviles

El procedimiento general de cálculo dinámico se basa en la integración en el tiempo de la respuesta para las cargas móviles representativas de los ejes del tren (Figura 6). Este método sirve tanto para situaciones resonantes o no, y constituye un modelo suficientemente aproximado para prácticamente todos los casos. Por otra parte, la disponibilidad actual de programas de cálculo y ordenadores potentes permite la realización de dichos cálculos sin gran dificultad.

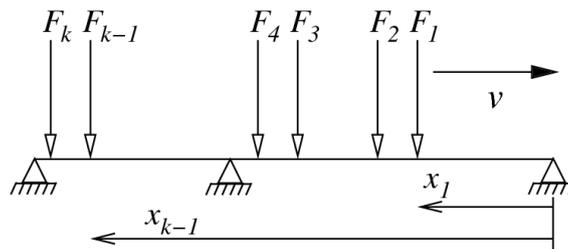


Figura 6: Modelos con cargas móviles

La discretización lineal del modelo de la estructura mediante elementos finitos u otro método equivalente conduce en general a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales del tipo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t), \quad (6)$$

siendo \mathbf{M} la matriz de masas, \mathbf{C} la matriz de amortiguamiento, \mathbf{K} la matriz de rigidez, \mathbf{u} el vector de desplazamientos incógnita y $\mathbf{f}(t)$ el vector de fuerzas correspondiente a las cargas móviles, función del tiempo.

Los métodos de cálculo en ingeniería estructural para cálculo estático dan lugar a *ecuaciones algebraicas* (lineales o no), mientras que en este caso se obtiene un sistema de *ecuaciones diferenciales* (6) cuya resolución exige la integración en el tiempo. Para ello, el método directo resolvería los N grados de libertad del problema integrando las ecuaciones completas 6. Generalmente es posible (y preferible) realizar una reducción de los grados de libertad mediante análisis modal. Este procedimiento se basa en un primer cálculo de los modos normales de vibración y de sus frecuencias asociadas, aspecto que está incluido en la mayoría de los programas de cálculo actuales de ingeniería estructural, para posteriormente seleccionar únicamente los modos significativos e integrar este conjunto reducido de grados de libertad. En algunos casos simples, como la viga simplemente apoyada, es posible incluso determinar estos modos analíticamente sin ayuda de programas de cálculo numérico.

Una vez obtenidos los modos de vibración $\phi_i(x)$ y sus frecuencias asociadas ω_i , siendo x la coordenada longitudinal del puente, resulta una ecuación desacoplada para cada modo del tipo:

$$M_i \ddot{y}_i + 2\zeta_i \omega_i M_i \dot{y}_i + \omega_i^2 M_i y_i = \sum_{k=1}^{n_{\text{ejes}}} F_k \langle \phi_i(vt - d_k) \rangle, \quad (7)$$

siendo y_i la amplitud del modo de vibración (flecha de la estructura), ζ_i la fracción de amortiguamiento crítico del modo i y $\langle \phi(\bullet) \rangle$ una notación con el significado siguiente:

$$\langle \phi(x) \rangle = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } 0 < x < l \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (8)$$

El análisis modal representa importantes ventajas y economías de cálculo para puentes ferroviarios, ya que generalmente sólo se necesita considerar un número de modos mucho menor que el número de grados de libertad del modelo completo. En el caso de un puente simplemente apoyado en muchas ocasiones sólo se precisa un único modo de vibración. En estructuras más complejas se suele limitar los modos a aquellos cuya frecuencia sea inferior a 30 Hz. Esta reducción adquiere especial relevancia si se tiene en cuenta que generalmente se necesita hacer barridos en función de la velocidad de los trenes, necesitándose centenares de cálculos dinámicos, ya que a menudo es difícil conocer exactamente las velocidades críticas de resonancia.

La mayoría de los programas de cálculo por elementos finitos incluyen este tipo de técnicas de cálculo dinámico lineal y el análisis modal. Sin embargo, es más raro que incluyan una utilidad de preproceso para determinar el valor de las fuerzas $\mathbf{f}(t)$ producidas por las cargas móviles, en cuya ausencia deberán realizarse programas o rutinas de cálculo específicas, ya que su especificación a mano resulta exageradamente laboriosa.

En estos cálculos deben obtenerse los valores relacionados con los estados límite últimos (ELU) como esfuerzos o tensiones, o en casos simplificados los desplazamientos que bajo la hipótesis aproximada de proporcionalidad servirían para determinar dichos esfuerzos a partir de un cálculo estático patrón. Es importante advertir que también deben verificarse variables relacionadas con estados límite de servicio (ELS) como desplazamientos, giros y aceleraciones en el puente. Generalmente esta respuesta relacionada con ELS resulta la más crítica en el dimensionamiento de la estructura [16]. Como ejemplo se muestra en la figura 7 la historia de aceleraciones correspondiente al mismo caso antes mostrado en la figura 2. Se puede comprobar que el límite admisible está en el caso de las aceleraciones que para los desplazamientos, que como se ha dicho pueden considerarse que definen de manera proporcional los esfuerzos estructurales.

2.3. Impronta dinámica

Una alternativa al cálculo dinámico directo, que puede resultar útil en algunos casos, es el uso de modelos basados en la *impronta dinámica del tren*. Estos modelos desarrollan la respuesta como

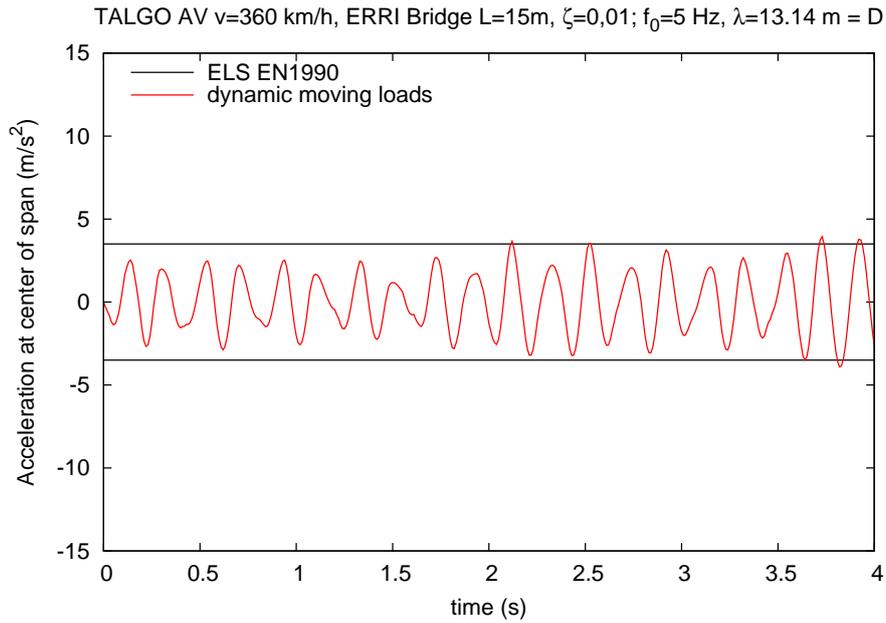


Figura 7: Talgo sobre puente ERRI $L = 15$ a velocidad $v = 360$ km/h, no resonante. Historia de aceleraciones.

combinaciones de sumas de armónicos amortiguados, y establecen cotas superiores de esta suma, conduciendo finalmente a expresiones analíticas que son envolventes aproximadas y evitando así el análisis dinámico directo por integración en el tiempo. En contrapartida su aplicación está limitada a *puentes simplemente apoyados*, que pueden representarse dinámicamente mediante un único modo de vibración. Estos modelos han sido desarrollados y empleados hace tiempo por grupos de la SNCF, pudiendo encontrarse una descripción detallada en [18].

La *impronta dinámica* de un tren se puede interpretar como una función que caracteriza el efecto dinámico de un tren sobre un puente cualquiera (simplemente apoyado). Hay varios tipos de modelos de este tipo propuestos, básicamente similares aunque con diferencias de detalle:

- DER, basado en la Descomposición de la Excitación en Resonancia;
- LIR, basado en la Línea de Influencia Residual;
- IDP, una versión ligeramente modificada del LIR con precisión mejorada [6].

Todos los métodos anteriores proporcionan una envolvente analítica de la respuesta dinámica de un puente determinado, como producto de tres términos: un término constante, la *línea de influencia dinámica* y la *impronta dinámica* del tren. Tomemos como ejemplo el método LIR para evaluar la aceleración máxima. Este método se basa en el cálculo de las vibraciones libres residuales después de que cada carga individual abandona el puente simplemente apoyado. La aceleración Γ en el centro del vano puede expresarse como:

$$\Gamma = \frac{1}{M} \cdot A(K) \cdot G(\lambda), \quad (9)$$

donde M es la masa total del puente y

$$A(K) = \frac{K}{1-K^2} \sqrt{e^{-2\zeta \frac{\pi}{K}} + 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{K}\right) e^{-\zeta \frac{\pi}{K}}} \quad (10)$$

$$G(\lambda) = \max_{i=1}^N \sqrt{\left[\sum_{k=1}^i F_k \cos(2\pi\delta_k) e^{-2\pi\zeta\delta_k} \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^i F_k \sin(2\pi\delta_k) e^{-2\pi\zeta\delta_k} \right]^2}, \quad (11)$$

siendo $\lambda = v/f_0$ la longitud de onda, con v la velocidad de circulación y f_0 la frecuencia propia (Hz) del primer modo de vibración, $K = \lambda/(2l)$, siendo l la longitud del tramo isostático, F_k las cargas de cada uno de los N ejes, $\delta_k = (x_k - x_1)/\lambda$ las distancias normalizadas al primer eje de la composición, y ζ la tasa de amortiguamiento.

El término $G(\lambda)$ (ecuación (11)) es el denominado con anterioridad *impronta dinámica*, mientras que $A(K)$ es la *línea de influencia dinámica*. La impronta del tren depende sólo de la distribución de las cargas por eje del tren y del amortiguamiento. Cada tren de cargas tiene una impronta dinámica propia del mismo, que es independiente de las características mecánicas de los puentes. Como ejemplo, en la figura 8 se representa la impronta dinámica del tren ICE2 para distintos valores de amortiguamiento.

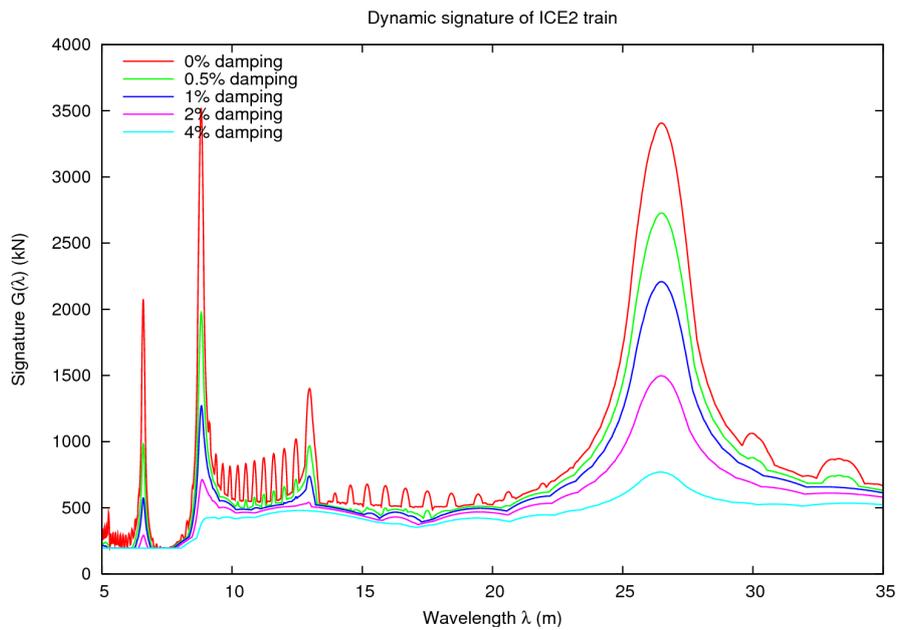


Figura 8: *Impronta dinámica para ICE2 con varios niveles de amortiguamiento*

Los picos de las improntas dinámicas definen las longitudes de onda resonantes para cada tren, y están asociadas a las distancias características entre ejes. En la figura 9 se representan las improntas dinámicas de los trenes de alta velocidad en Europa, pudiéndose observar las distintas características de las mismas. Por ejemplo, se observa claramente que en el Talgo AV se produce un pico muy marcado para $\lambda = 13,14$ m, distancia regular entre los ejes del mismo. Por el contrario, para los trenes con vehículos convencionales de bogies como el ICE2 la longitud de los coches es mayor y consecuentemente la λ de resonancia. En concreto para el ICE2 el pico fundamental se produce para $\lambda = 26,4$ m que coincide con la longitud del coche.

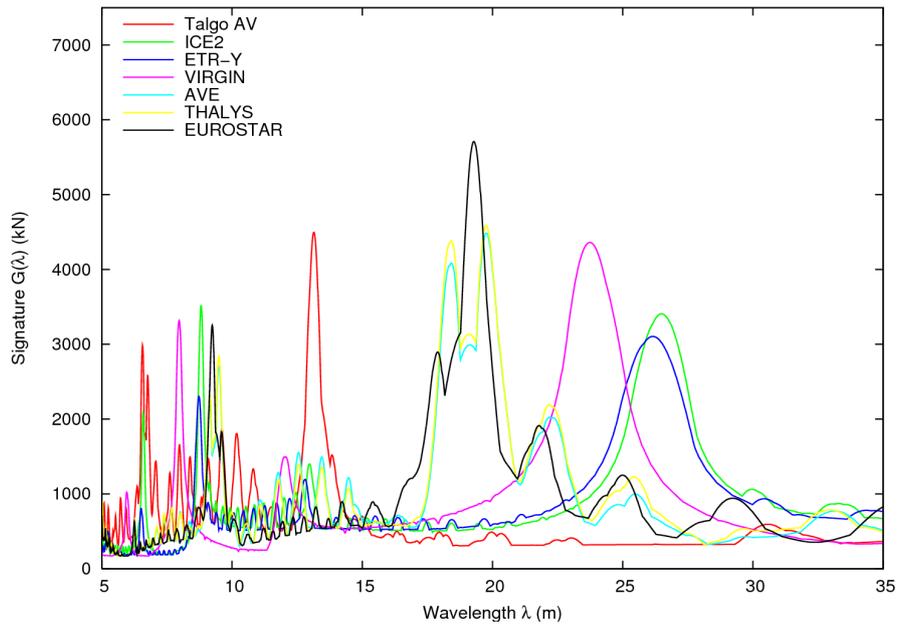


Figura 9: *Improntas dinámicas de trenes reales de alta velocidad en Europa*

2.4. Interacción vehículo–estructura

El cálculo dinámico con interacción vehículo–estructura consiste al igual que el cálculo con cargas móviles en una integración en el tiempo de las ecuaciones dinámicas. Añaden la consideración adicional de la vibración del propio vehículo debido a la suspensión del mismo, por lo cual las cargas de los ejes no poseen en la realidad un valor fijo durante el paso del puente.

Este tipo de modelos representan, en el caso más general (figura 10.a) la suspensión primaria, con sus valores de rigidez y amortiguamiento por eje (K_p, C_p), la suspensión secundaria, con los correspondientes valores de rigidez y amortiguamiento por bogie (K_s, C_s), la masa no suspendida, correspondiente a la masa nominal del eje de la rueda (m_w), la longitud, masa y momento de inercia del bogie (L_B, M_B, J_B), la masa suspendida y momento de inercia que corresponden a la caja del vehículo (M, J) y la geometría del vehículo: longitud total (L), distancia entre el centro de gravedad de la caja del vehículo y los pivotes de los bogies delantero y trasero (d_{Bd}, d_{Bt}) y la distancia entre ejes de un bogie (d_{eB}). En aquellos vehículos en los que el sistema de guiado no se realice a través de sistemas tipo bogies se adaptaría el esquema anterior a la configuración particular de los ejes y del sistema de suspensión, con el nivel de detalle equivalente.

Los modelos completos anteriores no siempre son necesarios, pudiendo realizarse una simplificación de los mismos. Se denominan *modelos simplificados* de cálculo con interacción vehículo–estructura, aquellos en los que se modelizan las suspensiones de cada eje de forma independiente, sin tener en cuenta el efecto de acoplamiento de la caja del vehículo. De esta forma se tiene en cuenta (ver figura 10.b) la suspensión primaria, con sus valores de rigidez y amortiguamiento por eje (K_p, C_p), la masa no suspendida, correspondiente a la masa nominal del eje de la rueda más la parte proporcional de la masa totalmente suspendida (caja del vehículo) (m_{ns})¹ y la masa suspendida, que en este caso, en valor es equivalente a la parte proporcional de la masa del bogie (m_s).

Es importante señalar que en los modelos simplificados de interacción cada eje es independiente del resto —lo que significa que no hay interacción entre los ejes de un mismo vehículo—,

¹Nótese que aunque se denomina de la misma manera —masa no suspendida— a m_{ns} (modelo simplificado) y a m_w (modelo completo), la manera de calcular estos valores es diferente.

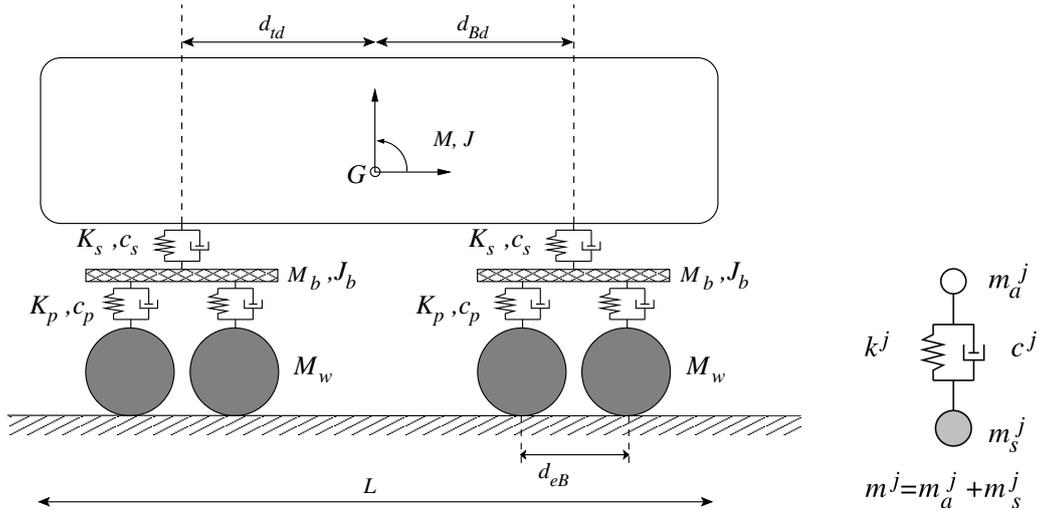


Figura 10: Modelos de interacción vehículo–estructura: a) modelo completo; b) modelo simplificado.

mientras que en los modelos completos, existe cierta interacción entre ellos, pues la modelización parte de la totalidad de la caja del vehículo.

Modelo con interacción propuesto.— Este modelo se ha implementado en [6]. Se considera un tren de k cargas, representadas cada una de ellas según un modelo simplificado de interacción vehículo estructura (figura 11).

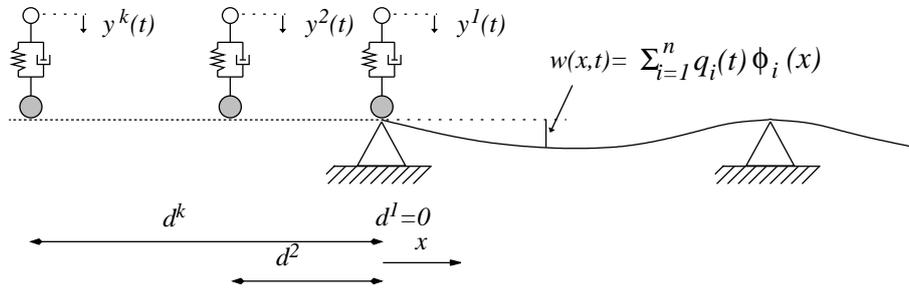


Figura 11: Tránsito de un tren de cargas según el modelo simplificado de interacción vehículo-estructura

Al considerar en el cálculo un tren de cargas, se incrementa el número de ecuaciones diferenciales a resolver; en el caso de una carga aislada se limita al número de modos de vibración considerados n más la correspondiente al sistema mecánico del elemento simplificado de interacción, en total $n + 1$. Suponiendo un grupo de k cargas, tendremos que resolver un sistema de $n + k$ ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones correspondientes a los modos de vibración del puente (7) se ven modificadas en el término de la carga modal, puesto que, para cada instante, se deberá calcular qué cargas se encuentran sobre la deformada y el valor de la amplitud correspondiente a la posición. Para el caso general se plantean las siguientes ecuaciones:

- Para cada modo de vibración ($i = 1 \dots n$):

$$M_i \ddot{q}_i + C_i \dot{q}_i + K_i q_i = \sum_{j=1}^k \langle \phi_i(d_{rel}^j) \rangle (g m^j + m_a^j \ddot{y}^j) \quad (12)$$

- Para cada elemento de interacción ($j = 1 \dots k$):

$$m_a^j \ddot{y}^j + k^j \left[y^j - \sum_{i=1}^n q_i \langle \phi_i(d_{rel}^j) \rangle \right] + c^j \left[\dot{y}^j - \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \langle \phi_i(d_{rel}^j) \rangle - \sum_{i=1}^n q_i v \langle \phi_i'(d_{rel}^j) \rangle \right] = 0 \quad (13)$$

En las ecuaciones (12) y (13) se ha empleado la notación $\langle \phi(\bullet) \rangle$, definida anteriormente en la ecuación (8). Por otra parte, se denomina $d_{rel}^j = vt - d^j$ a la posición relativa del elemento j sobre el puente.

La consideración de la interacción vehículo–estructura implica generalmente una reducción de la respuesta del puente debido a la existencia de mecanismos que facilitan la disipación de energía (amortiguadores) o que la intercambian entre ambos subsistemas (suspensiones). Sin embargo, para situaciones no resonantes o puentes hiperestáticos, los efectos de interacción suelen ser pequeños. En cambio, para situaciones resonantes la reducción obtenida por la interacción vehículo–estructura puede ser mayor, especialmente en puentes de luz pequeña (10–30 m). Como ejemplo, en la figura 12 se muestran las aceleraciones obtenidas para un puente tipo de 15 m de luz, el mismo caso al que se refieren las figuras 2, 3 y 7, en los dos tipos de situaciones, considerando ahora modelos con interacción. Se comprueba para la velocidad resonante que, a pesar de la reducción de aceleraciones, estas siguen por encima del límite admisible.

Otro ejemplo significativo puede verse en la figura 15, donde se muestra un barrido con las envolventes de efectos del tren ICE2 en puentes de distintas luces. Sólo para la luz más corta (20 m) se observa una reducción apreciable de los efectos, en cualquier caso modesta.

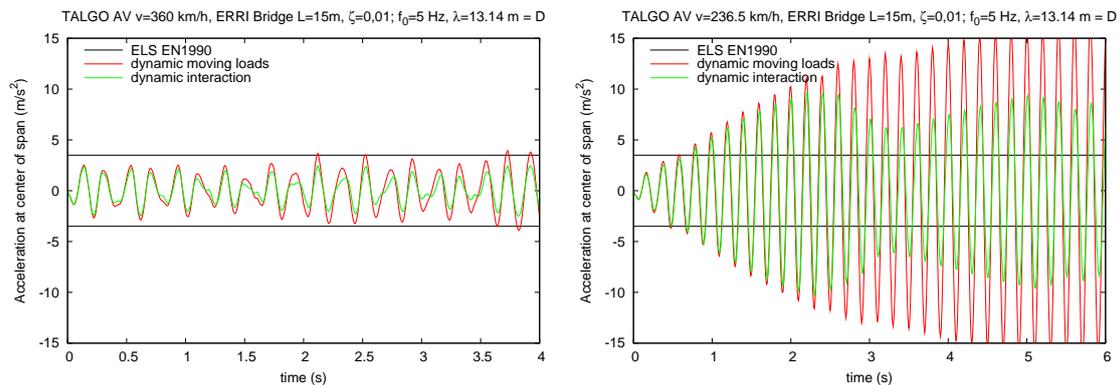


Figura 12: Respuesta en puente ERRI $L = 15$ m con interacción a) para velocidad no resonante b) para velocidad resonante

2.5. Instrucciones y normas de proyecto

2.6. Instrucción IAPF

La vigente *Instrucción de acciones en puentes de ferrocarril (IAPF)* data de 1975 [12]. Aunque en su día supuso una aportación notable, en este momento está completamente desfasada, al menos en lo que se refiere a acciones dinámicas. En esta norma se define un «incremento dinámico», expresado en tanto por ciento (%), en tableros isostáticos:

$$I = \begin{cases} 0,33v, & \text{luz } L < 6 \text{ m;} \\ \frac{114\sqrt{L}}{3,10 - 1,76\sqrt{L} + L}, & \text{luz } L \geq 6 \text{ m.} \end{cases}$$

En esta expresión v es la velocidad del tren en km/h. El incremento dinámico anterior da lugar a un coeficiente de impacto $\Phi = 1 + I/100$ que se aplica a las solicitaciones estáticas definidas por unos trenes tipo específicos, denominados «tren tipo A» y «tren tipo B», que incluyen cargas puntuales de 30 t y sobrecargas repartidas de hasta 12 t/m.

Para tramos continuos la expresión propuesta es

$$I = 65 \frac{\mu}{1 - \mu + \mu^2}; \quad \mu = \frac{vT}{2L}, \quad (14)$$

siendo T el periodo fundamental de vibración, y debiendo expresarse la velocidad v para esta fórmula en m/s (por cierto, hay una errata en la norma publicada, en ella se dice km/h debiendo ser m/s). El rango de velocidades de aplicación de este coeficiente es $v \leq 200$ km/h.

Por otra parte, desde hace varios años se ha desarrollado un borrador de una nueva IAPF [11], que se espera sea publicada oficialmente en breve por parte del Ministerio de Fomento. En esta nueva norma se consideran diversos métodos para evaluar los efectos dinámicos, en el apéndice B de la misma. Los métodos propuestos coinciden sustancialmente con los expuestos anteriormente en los apartados 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4. Se resumen a continuación el esquema de métodos previstos en esta norma para cálculo dinámico y el ámbito de aplicación de cada uno:

- Métodos que no consideran resonancia
 - B.2.1: Coeficiente de impacto envolvente (Φ)
 $v < 220$ km/h, tipología “convencional”, huso de frecuencias
 - B.2.2: Coeficiente de impacto para trenes reales ($1 + \varphi'$)
 $v < 220$ km/h, tipología “convencional”
- Métodos que consideran *resonancia*
 - B.2.4: Cálculo dinámico con cargas móviles
 - B.2.5: Impronta dinámica $G(\lambda)$
Tableros isostáticos
 - B.2.6: Cálculo dinámico con interacción vehículo–estructura

2.7. Eurocódigos: EN1991-2, EN1990-A1

Los Eurocódigos [7] y [8] han sido publicados recientemente y contienen los resultados de las últimas investigaciones desarrolladas en el seno de la UIC y del ERRI sobre efectos dinámicos en puentes de ferrocarril. Los métodos de cálculo propuestos coinciden también con lo expuesto anteriormente en los apartados 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4. En estas últimas versiones de los eurocódigos se han separado las acciones [7] de la especificación de los límites que definen los ELS y ELU [8].

Las provisiones de estos eurocódigos están en línea con la nueva propuesta Española [11]. La diferencia principal entre ambas instrucciones es que en [11] se requiere con carácter general un coeficiente de clasificación $\alpha = 1,21$, lo que equivale a un aumento del tren tipo UIC71 del 21 %. El motivo de este aumento ha sido el de mantener la capacidad existente de las estructuras en la red ferroviaria a cargas de 30 t.

2.8. Ficha UIC 776-1R

En esta instrucción [21] se recopilaron los trabajos de definición del nuevo tren de cargas UIC71 y los coeficientes de impacto asociados para consideración de efectos dinámicos, que coinciden con lo expuesto anteriormente en el apartado 2.1. La primera edición completa data de 1979, aunque ha sido recientemente revisada en 2006 de forma que esté en consonancia con lo especificado en [7] y [8].

2.9. Especificaciones técnicas de interoperabilidad

Recientemente y como resultado de las directivas europeas en relación con el transporte por ferrocarril, se han establecido diversas especificaciones relacionadas con líneas transeuropeas interoperables. En lo que respecta a infraestructura, se ha publicado la especificación para líneas de alta velocidad [4]. En estas especificaciones se requiere que para las estructuras en las nuevas líneas de alta velocidad interoperables se realicen cálculos dinámicos con los trenes universales HSLM, que se comentarán en el apartado 3.1 y que están contemplados en [11] y [7].

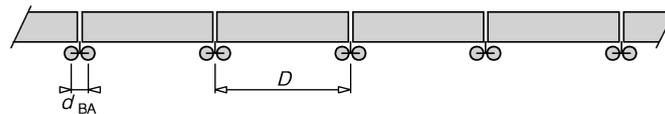
Es importante considerar que, a diferencia de los eurocódigos, estas especificaciones son de *obligado cumplimiento* para todas las líneas transeuropeas interoperables.

3. Algunos condicionantes básicos de la respuesta dinámica

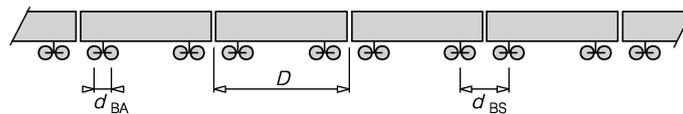
3.1. Trenes

Los efectos de las cargas de tráfico deben evaluarse para todos los trenes posibles en la línea y el rango de velocidades de cada uno, ya que como se ha mostrado los efectos pésimos no se obtienen necesariamente para la velocidad máxima.

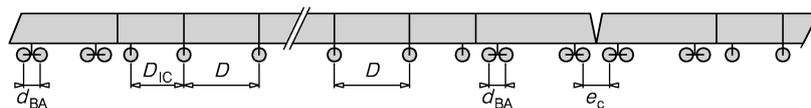
Los trenes existentes en Europa pueden clasificarse en tres tipos (figura 13): *convencionales*, con dos bogies por coche (ICE, ETR-Y, VIRGIN); *articulados*, con un bogie compartido entre cada dos coches (THALYS, AVE-1, EUROSTAR); *regulares*, con un eje único entre cada dos coches (TALGO AVE-2). La comprobación de todos estos trenes exige en principio la realización de ba-



1 - Articulated train



2 - Conventional train



3 - Regular train

Figura 13: Tipos de trenes de alta velocidad, según [7]

rridos de velocidad para cada uno de ellos obteniendo los máximos de respuesta en cada caso. Aún así no se puede garantizar que una posible evolución futura de estos trenes no tenga una características diferentes y resulte en un efecto dinámico mayor.

Para sistematizar estas condiciones de interoperabilidad se ha propuesto la familia de trenes dinámicos universales también llamada HSLM (*High Speed Load Model*). Este modelo, propuesto originalmente en [19], está formado por un grupo básico de 10 trenes HSLM-A (cuadro 1), complementado por un grupo adicional HSLM-B para luces inferiores a 7 m.

Característica	HSLM-A
Tipo	articulado
Longitud total	$\simeq 400$ m
Longitud de los coches D	de 18 a 27 m
Carga por eje	170 kN
Distancia entre ejes de un mismo bogie	2,5 m
Locomotoras en cabeza y cola de la composición	Sí

Cuadro 1: Características de los trenes universales HSLM-A. Fuente: Informe técnico del Comité ERRI D214 [19]

Esta familia de trenes es envolvente de todos los trenes reales de alta velocidad, así como de las evoluciones previstas en el futuro. En la figura 14 se han calculado las envolventes de los trenes HSLM y de los trenes reales, comprobándose este hecho. En consecuencia, resulta absolutamente recomendable realizar los cálculos dinámicos con esta familia HSLM, ya que además de garantizar la interoperabilidad no supone una penalización apreciable para las estructuras.

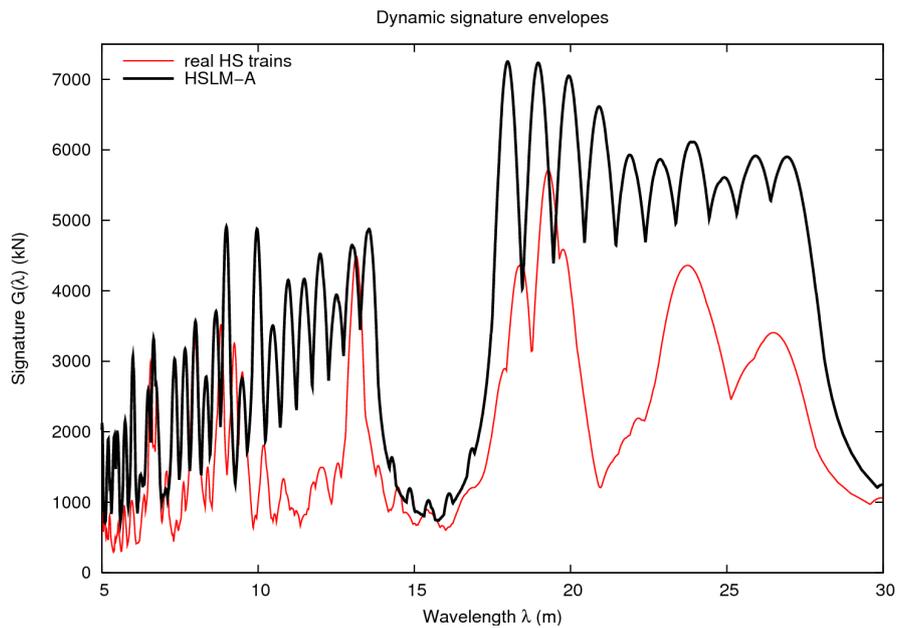


Figura 14: Envolventes de improntas dinámicas de trenes reales de alta velocidad y de los trenes universales HSLM-A

3.2. Puentes

La resonancia puede ser mucho más severa para puentes de luces cortas. Como ejemplo ilustrativo, la figura 15 muestra las envolventes de la respuesta en desplazamientos obtenidos para el tren ICE2 en un barrido de velocidades entre 120 y 420 km/h con incrementos de 5 km/h. Los cálculos

se han realizado para tres puentes isoatómicos de luces 20, 30 y 40 m. La respuesta obtenida para el puente de luz más corta es muchas veces mayor que los otros. Este comportamiento puede explicarse por una causa principal, que en los puentes más cortos que la longitud característica de los coches existe siempre una velocidad crítica para la que la acción de los ejes será coincidente con la vibración, actuando simultáneamente un sólo eje. Sin embargo, en luces más largas actuarán simultáneamente varios ejes sobre el puente, con acciones que se cancelan parcialmente entre sí, lo que impide una resonancia tan marcada. Comprobamos por otra parte que la consideración de la interacción vehículo–estructura reduce ligeramente la respuesta resonante, aunque sigue siendo muy elevada. Observamos adicionalmente en la figura 15 que para las velocidades más bajas

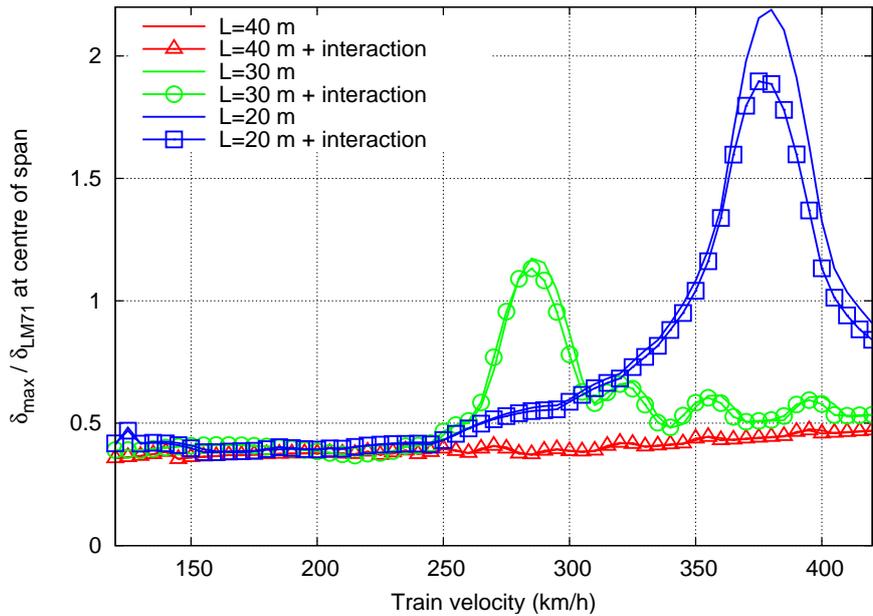


Figura 15: Respuesta dinámica de puentes de distinta Luz: Tren ICE2, flecha dinámica en centro de vano. Puentes ERRI de luces $L = 20, 30$ y 40 m ($L = 20$ m, $f_0 = 4$ Hz, $\rho = 20000$ kg/m, $\delta_{UIC71} = 11,79$ mm; $L = 30$ m, $f_0 = 3$ Hz, $\rho = 25000$ kg/m, $\delta_{UIC71} = 15,07$ mm; $L = 40$ m, $f_0 = 3$ Hz, $\rho = 30000$ kg/m, $\delta_{UIC71} = 11,81$ mm). Todos los cálculos con amortiguamiento $\zeta = 2\%$.

respuesta es del orden del 40% de la correspondiente al tren estático tipo, aspecto que ya se ha comentado anteriormente.

Otro parámetro condicionante de la respuesta debido al puente es el nivel de amortiguamiento estructural. En la figura 16 se muestran los niveles propuestos en la nueva norma [11], que han resultado de una serie de medidas en puentes metálicos y de hormigón en España [5]. La influencia del amortiguamiento es decisiva en la magnitud de los efectos dinámicos, como puede verificarse en la figura 8, en la que se comprueba que los máximos debidos a resonancia se reducen a la mitad cuando se considera un amortiguamiento $\zeta = 2\%$ respecto al caso sin amortiguamiento.

4. Aplicaciones de cálculo en puentes

Se exponen aquí brevemente algunas aplicaciones en las que se evalúan los efectos dinámicos para proyectos reales. Además de ilustrar la aplicación básica de los métodos de cálculo, servirán para discutir algunos efectos importantes como son la continuidad del tablero, la rigidez a torsión y por último los efectos tridimensionales.

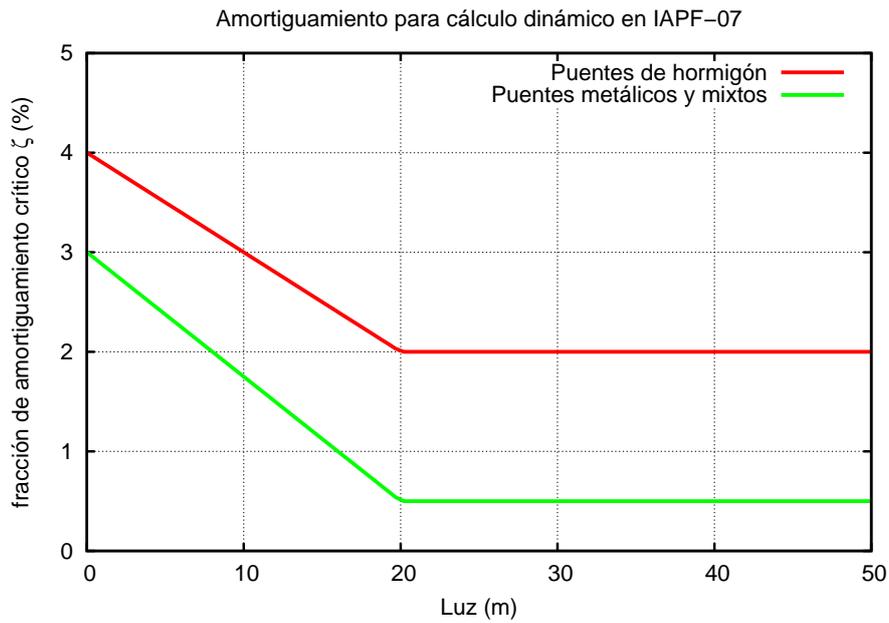


Figura 16: Amortiguamiento para cálculo dinámico en IAPF [11]

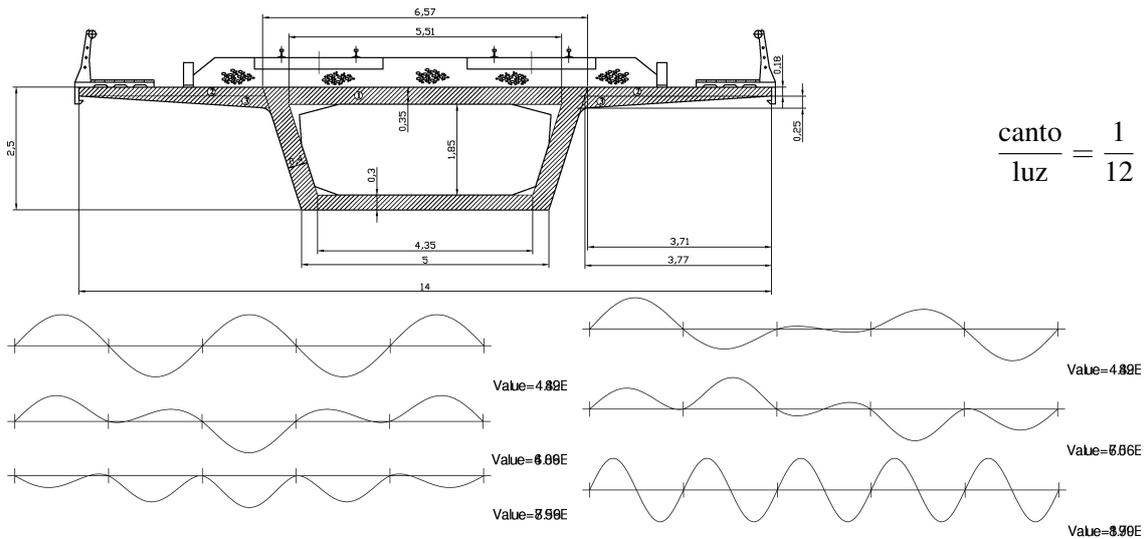


Figura 17: Viaducto de Arroyo del Salado, tablero continuo, 30 vanos de 30 m, Cajón de hormigón pretensado in-situ. Definición geométrica de la sección y Primeros 6 modos de vibración [17]

4.1. Puentes de Tablero Continuo

Se ilustra a continuación la diferencia en cuanto al comportamiento dinámico de los puentes continuos respecto a los formados por tramos isostáticos con apoyos simples. Para ello se ha realizado el dimensionamiento para el caso real del viaducto de Arroyo del Salado, de unos 900 m de longitud total. La solución proyectada [17] ha sido un tablero continuo, formado por 30 vanos de 30 m de luz cada uno, con sección cajón, de hormigón pretensado in-situ. La definición básica de la sección transversal (constante) y los primeros seis modos de vibración se muestran en la figura 17.

Se ha realizado un cálculo dinámico con los trenes universales HSLM, cuyo resultado se muestra en la figura 18a. Asimismo, se ha realizado como ejercicio el cálculo dinámico para el puente

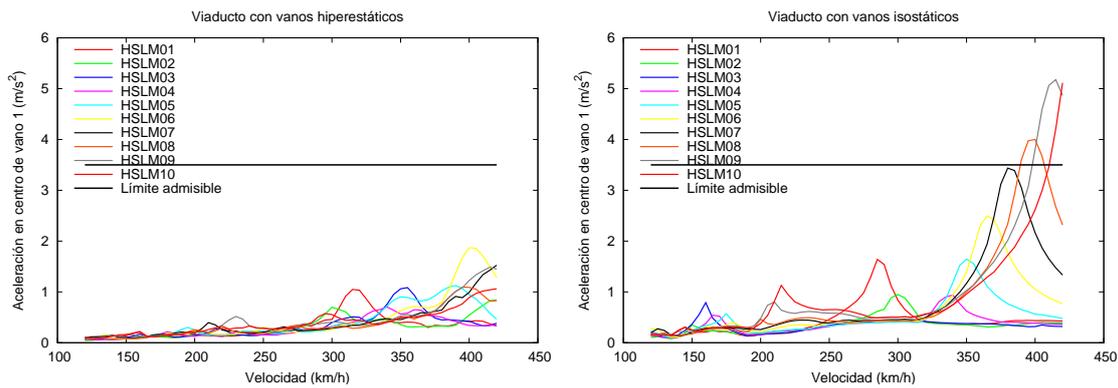


Figura 18: Resultado de los barridos de cálculo dinámico con los trenes universales HSLM para las aceleraciones del tablero, en los casos: a) tablero continuo, en el que satisface el límite de aceleraciones ($a_{max} \leq 3,5 \text{ m/s}^2$), y b) tablero simplemente apoyado, en el que no satisface el límite de aceleraciones

con iguales luces y sección de las mismas características pero en tramos simplemente apoyados, mostrándose el resultado en la figura 18b. Puede comprobarse que el efecto dinámico es considerablemente mayor para la configuración isostática, que excede los niveles permitidos de aceleración.

La comparación anterior tiene algunas limitaciones, ya que el dimensionamiento estructural adecuado en la configuración isostática sería probablemente distinto. Sin embargo es ilustrativo de un fenómeno generalizado: *las estructuras hiperestáticas en las que intervienen de manera significativa distintos modos de vibración exhiben efectos dinámicos resonantes reducidos, considerablemente inferiores a las estructuras isostáticas en las que generalmente hay un único modo de vibración preponderante*. El motivo es fácil de explicar, ya que la acción de los ejes sobre los distintos modos cancelará la respuesta dinámica entre unos y otros al no poder actuar todos en fase.

4.2. Tableros con baja rigidez torsional

La vibración en el tablero de un puente tipo viga no sólo tiene la componente debida a la flexión, sino que en los tableros usuales de doble vía debe considerarse además la debida a la torsión que producen las cargas excéntricas. Esta componente puede tener importancia en los casos de tableros de sección total o parcialmente abierta, con baja rigidez torsional.

Un ejemplo ilustrativo de esta situación son los tableros en sección mixta con dos jácenas metálicas, constituyendo desde el punto de vista torsional una sección prácticamente abierta, a pesar de la colaboración parcial de los arriostramientos en las alas inferiores de las vigas metálicas (figura 19a). Esta tipología se ha empleado en numerosos puentes en Francia, por ejemplo en la nueva línea TGV-Mediterrané. En España se ha propuesto una variante a esta tipología (Viaducto de Las Piedras, F. Millanes, 2004), por la que se efectúa un cierre parcial del circuito torsional mediante unas losas situadas sobre las alas inferiores de las jácenas, con continuidad longitudinal únicamente en la zona de momentos negativos (figura 19b).

El puente considerado es el viaducto de «Las Piedras», correspondiendo la autoría del proyecto a Francisco Millanes (IDEAM), 2004. La longitud total del viaducto es de 1208,5 m, con luces $L = 63,5 \text{ m}$, relación canto/luz $d/L = 1/15$, y altura de pila máxima $h = 92 \text{ m}$. Se ha realizado el cálculo dinámico con dos opciones diferentes: con la sección parcialmente cerrada propuesta en el proyecto y con una sección bijácena tradicional abierta. El aspecto más crítico en el diseño son las aceleraciones. En la figura 20 se muestran los resultados de los barridos de velocidades para

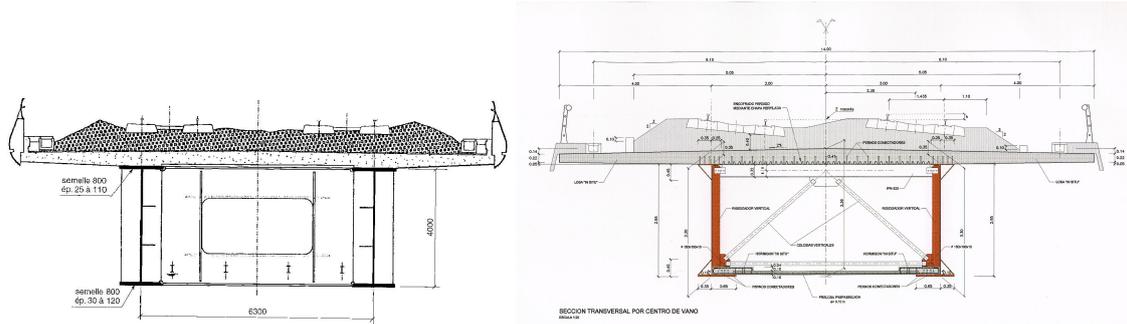


Figura 19: Distintos tipos de secciones mixtas para viaducto de ferrocarril de alta velocidad. a) Sección bijácena, línea TGV-Mediterranée, con arriostramientos metálicos inferiores y baja rigidez torsional; b) Sección parcialmente cerrada mediante losas de hormigón y rigidez torsional aumentada, Viaducto «Las Piedras» (F. Millanes, 2004)

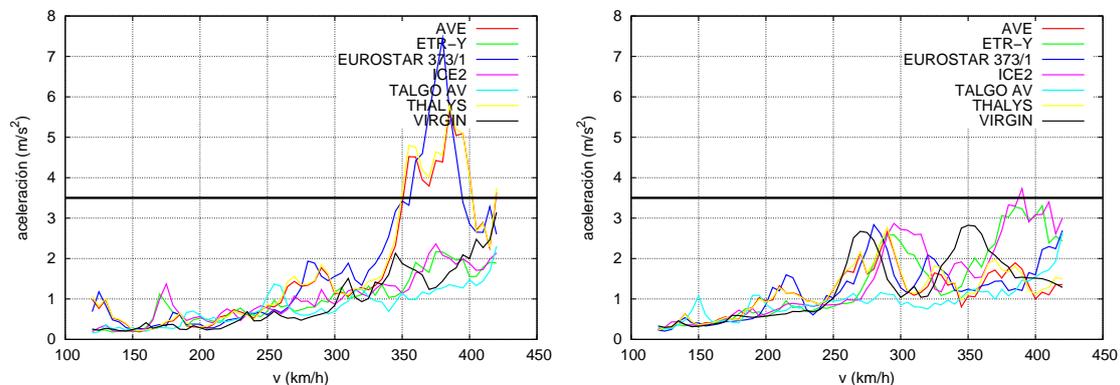


Figura 20: Aceleración vertical máxima, incluyendo flexión y torsión, en la mitad del vano lateral, para las dos configuraciones: a) sección abierta, no satisface $a_{max} \leq 3,5 \text{ m/s}^2$; b) sección parcialmente cerrada, satisface requisitos dinámicos

los trenes HSLM en ambos casos. Se aprecia claramente cómo en el caso de la sección con rigidez torsional aumentada los niveles de aceleración cumplen el requisito, mientras que para la sección abierta resultan aceleraciones claramente superiores al límite admisible.

4.3. Configuraciones estructurales que requieren modelos tridimensionales

Como última aplicación se exponen algunos detalles del cálculo de un puente tipo «pérgola» esviado. Con este tipo de configuración estructural los elementos resistentes son transversales. El tablero está formado por 64 vigas artesas prefabricadas, unidas mediante una losa superior (figura 21).

La longitud de las vigas se halla entre 33,35 y 40,62 m, con una separación entre ejes de 4,5 ó 6 m, para un ancho total de 326,75 m. El tren cruza en esta dirección bajo un ángulo de 15° . Considerando las características del viaducto, se ha considerado conveniente realizar los cálculos dinámicos mediante un modelo tridimensional de elementos finitos con elementos lámina, tanto para la losa como para las vigas artesas 22. Se realizó un análisis modal y fue necesario incluir 552 modos de vibración para considerar todos cuya frecuencia era inferior a 30 Hz. En la figura 22 se muestra también uno de los modos significativos empleados en el cálculo.

Para el cálculo de este modelo fue necesario programar unos módulos de preproceso especiales que distribuyesen las cargas móviles sobre la trayectoria esviada del tren. Las acciones de tráfico



Figura 21: Viaducto «Pérgola» con elementos transversales, en la línea Madrid–Valencia. Cortesía de ALVISA.

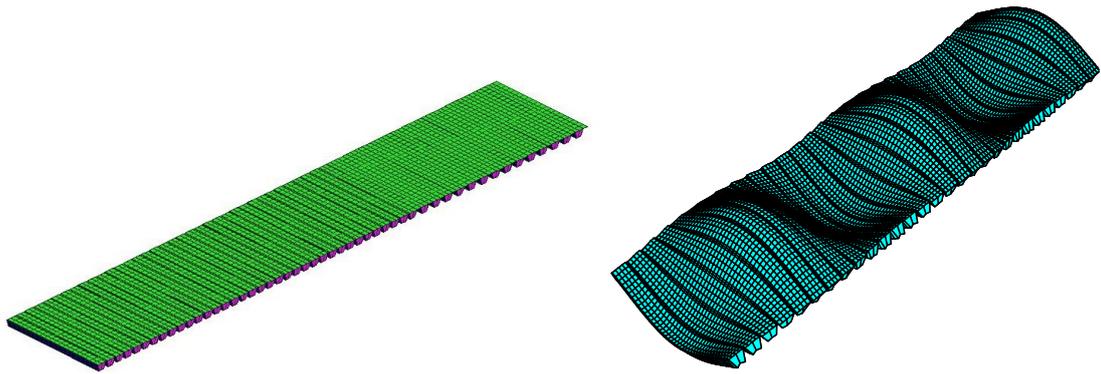


Figura 22: Viaducto «Pérgola» con elementos transversales: malla de elementos finitos y modo de vibración representativo (n.º 6)

fueron las de los trenes universales HSLM-A, realizando un barrido de velocidades entre 120 y 300 km/h cada 5 km/h. El coeficiente de impacto Φ_{real} se evaluó sobre la base de los desplazamientos (figura 23), haciéndose también comprobaciones adicionales para las aceleraciones y otros estados límite de servicio. Para realizar los cálculos se empleó un *cluster* de 24 ordenadores Pentium corriendo en procesos paralelos.

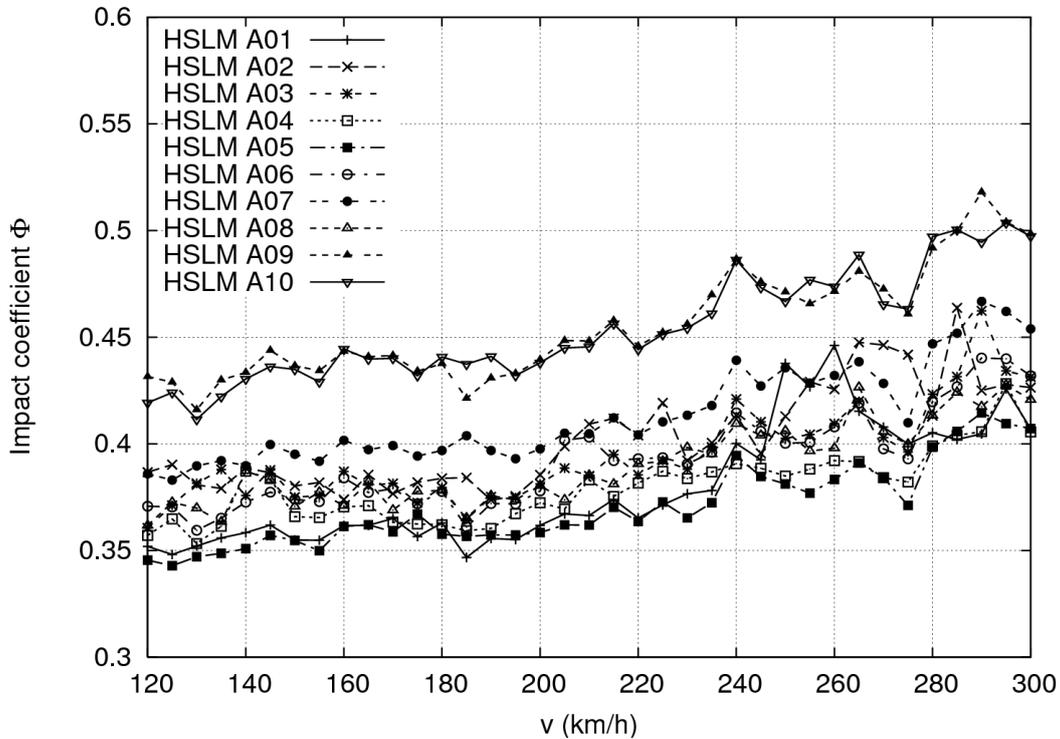


Figura 23: Viaducto tipo «pérgola»: coeficiente de impacto Φ resultante del cálculo dinámico para los trenes HSLM

5. Conclusiones

En primer lugar, debe resaltarse la importancia de considerar adecuadamente los efectos dinámicos del tráfico ferroviario, que si han sido siempre importantes, para las líneas de alta velocidad adquieren una gran relevancia. Esta consideración debe realizarse desarrollando correctamente los cálculos dinámicos necesarios en cada caso.

Adicionalmente a la pura realización de los cálculos, resulta de vital importancia que el ingeniero conozca y sepa establecer criterios de diseño que en la medida de lo posible no resulten en efectos resonantes. El conocimiento de cálculo del ingeniero para permitir este tipo de razonamientos no debe limitarse a las ecuaciones algebraicas, sino que debe comprender las propiedades y soluciones de las ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica.

Debido a que los trenes de pasajeros de alta velocidad son considerablemente más ligeros que el tren tipo, los coeficientes de impacto en esfuerzos para la evaluación de estados límite último raramente resultan críticos. Sin embargo, la verificación de los límites de servicio y en concreto la aceleración máxima suele ser uno de los puntos más críticos.

Las instrucciones de proyecto recientes [7], [8], [11] recogen adecuadamente los fenómenos dinámicos y sugieren métodos de cálculo adecuados. Estos métodos de cálculo pueden desarrollarse de distintas formas, desde métodos analíticos ad-hoc para los casos sencillos, evaluación

de las fórmulas de la impronta dinámicas, o modelos de cargas móviles con vigas o plenamente tridimensionales mediante elementos finitos.

Agradecimientos

El contenido de este trabajo ha sido realizado en distintas fases por estudiantes y colaboradores del Grupo de Mecánica Computacional de la Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid: Jaime Domínguez, Felipe Gabaldón, Juan Antonio Navarro, Beatriz Sanz, Rui Dias. Muy especialmente deseo agradecer también a Jorge Nasarre, de la Fundación de Caminos de Hierro, por su siempre entusiasta motivación y numerosas y esclarecedoras discusiones. Por último, al Ministerio de Fomento y la Dirección General de Ferrocarriles por el apoyo parcial a este trabajo mediante distintos proyectos de investigación.

Referencias

- [1] E. Alarcón. El coeficiente de impacto en puentes de ferrocarril. *Revista de Obras públicas*, 1971.
- [2] E. Alarcón, R. Álvarez, M. Doblaré, and J. Molina. Efectos dinámicos en puentes de ferrocarril. *Hormigón y acero*, 1985.
- [3] Comité Europeo de Normalización. *Eurocódigo 1: Bases de proyecto y acciones en estructuras; Parte 3: Acciones del tráfico en puentes*, Abril 1998. Publicado por Aenor.
- [4] European Commission. *Technical specification for Interoperability relating to the infrastructure subsystem of the trans-european high-speed rail system*. Commission decision 2002/732/EC 20 may 2002, 2002. Official journal of the European Communities OJ L 12/9/2002.
- [5] Comité de Redacción IAPF. Envoltantes de amortiguamiento para puentes de hormigón y metálicos basados en datos de renfe. Technical report, Escuela de Ingenieros de Caminos de Madrid, 1999. Informe interno redactado por J. Goicolea y J. Domínguez.
- [6] Jaime Domínguez Barbero. *Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia*. PhD thesis, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, 2001.
- [7] European Committee for Standardization. *EN1991-2: EUROCODE 1 - Actions on structures, Part 2: Traffic loads on bridges*. European Union, 2003.
- [8] European Committee for Standardization. *EN1990-A1: EUROCODE 0 – Basis of Structural Design, Ammendment A1: Annex A2, Application for bridges*. European Union, 2005.
- [9] L. Fryba. *Vibration of solids and structures under moving loads*. Academia, Noordhoff, 1972.
- [10] L. Fryba. *Dynamics of railway bridges*. Thomas Telford, 1996.
- [11] Dirección general de ferrocarriles. *Instrucción de acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril*. Ministerio de Fomento, España, borrador k4 edition, 2007. Grupo de Mecánica Computacional, Escuela de Ingenieros de Caminos, Madrid.

- [12] Dirección general de ferrocarriles y transporte por carretera. *Instrucción relativa a las acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril*. Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo, 1975.
- [13] Dirección general de ferrocarriles y transporte por carretera. Viaducto sobre el río tajo, línea ave madrid-sevilla, ensayos dinámicos. Technical report, Ministerio de Fomento, 1996.
- [14] J.M. Goicolea, J. Domínguez Barbero, F. Gabaldón, and J.A. Navarro. Estudio de fenómenos resonantes en puentes de ferrocarril. Technical report for RENFE, Grupo de Mecánica Computacional, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, December 2001.
- [15] A. Kryloff. Über die erzwungenen schwingungen von gleichförmigen elastischen stäben. *Mathematische Annalen*, 1905.
- [16] J. Nasarre. Estados límite de servicio en relación con los puentes de ferrocarril. In A. Campos R. Delgado, R. Calçada, editor, *Bridges for High-Speed Railways*, pages 237–250. Civil Engineering Dept., Faculty of Engineering of the University of Porto, 2004.
- [17] B. Sanz Merino. Proyecto de viaducto para el ferrocarril de alta velocidad sobre el arroyo del salado. Master's thesis, Escuela de Ingenieros de Caminos, UPM, 2005.
- [18] ERRI subcommittee D214. Design of Railway Bridges for Speed up to 350 km/h; Dynamic loading effects including resonance. Final report, European Rail Research Institute, November 1998. D214 Committee, draft c.
- [19] J.P. Tartary and N. Jobert. Recherche du train universel pour calculs dynamics. Technical report, A.V.L.S., Mayo 2000.
- [20] S.P. Timoshenko. *Vibration problems in engineering*. Van Nostrand, 1928.
- [21] UIC. *Fiche UIC 776-1R: Charges a prendre en consideration dans le calcul des ponts-rails*. Union Internationale des Chemins de Fer, 2006. 5 ed, aug 2006.