

## Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO DE FEBRERO (19 de Enero de 1996)

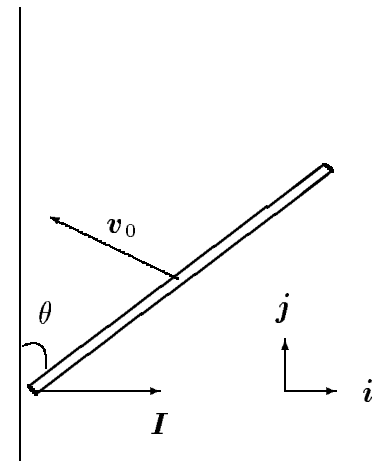
| Apellidos | Nombre | Nº | Grupo |
|-----------|--------|----|-------|
|           |        |    |       |

Ejercicio 3º

Tiempo: 45 min.

Una varilla homogénea de longitud  $l$  se mueve en un plano horizontal con velocidad  $\mathbf{v}_0$  de traslación (sin giro). Impacta por un extremo contra una pared lisa, con la que la varilla forma un ángulo  $\theta$ , con coeficiente de restitución  $e$ . Se pide:

- Movimiento de la varilla después del choque.
- Energía cinética de la varilla después del choque.
- En el caso particular en que  $e = 1$  y la velocidad de la varilla sea perpendicular a la pared, determinar el ángulo  $\theta$  para que la varilla adquiera la máxima velocidad angular posible después del choque.



Sean:

- $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}$  la velocidad del centro de masas de la varilla antes del choque (de acuerdo con el dibujo, sería  $v_{0x} < 0$ )
- $\mathbf{I} = I\mathbf{i}$  la impulsión que actúa en el extremo de la varilla que impacta.
- $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$  la velocidad del centro de masas de la varilla después del choque.
- $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$  la velocidad angular de la varilla después del choque (sentido positivo contrario a las agujas del reloj).

1.- Planteamos las siguientes ecuaciones:

- a. Balance de la cantidad de movimiento según  $x$ :

$$mv_{0x} + I = mv_x \quad (1)$$

- b. Balance de la cantidad de movimiento según  $y$ :

$$mv_{0y} = mv_y \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = v_y \quad (2)$$

este resultado indica que la velocidad tangencial a la pared se conserva, ya que en esta dirección no hay percusión.

- c. Balance del momento cinético en  $G$  (centro de la varilla):

$$I \frac{l}{2} \cos \theta = \frac{1}{12} ml^2 \omega \quad (3)$$

d. Coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v_x + \omega \frac{l}{2} \cos \theta}{v_{0x}} \quad (4)$$

Despejando  $I$  en (1) y sustituyendo en (3) se obtiene:

$$v_{0x} + \frac{1}{6} \frac{l\omega}{\cos \theta} = v_x \quad (5)$$

Resolviendo el sistema (4;5) se obtienen las expresiones de  $v_x$  y  $\omega$ :

$$v_x = \frac{v_{0x}(3 \cos^2 \theta - e)}{1 + 3 \cos^2 \theta} \quad (6)$$

$$\omega = -\frac{6v_{0x}(e + 1) \cos \theta}{l(1 + 3 \cos^2 \theta)} \quad (7)$$

Estas dos expresiones anteriores junto con (2) definen el movimiento después del choque.

**2.-** La energía cinética después del choque es:

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{12}ml^2\omega^2$$

Sustituyendo las expresiones (2;6;7) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}m \left( \frac{v_{0x}^2(3 \cos^2 \theta - e)^2}{(1 + 3 \cos^2 \theta)^2} + v_{0y}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{12}ml^2 \frac{36v_{0x}^2(e + 1)^2 \cos^2 \theta}{l^2(1 + 3 \cos^2 \theta)^2}$$

Operando y simplificando, resulta finalmente:

$$T = \frac{1}{2}m \left( \frac{v_{0x}^2(3 \cos^2 \theta + e^2)}{1 + 3 \cos^2 \theta} + v_{0y}^2 \right)$$

**3.-** En este caso, como  $e = 1$  el choque es elástico y la energía total se conserva. Por esta razón, la velocidad angular será máxima cuando  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$  sea mínima. Como  $v_y$  no varía durante la impulsión, el valor mínimo de  $v^2$  corresponde a  $v_x = 0$ . Imponiendo esta condición en (6) se obtiene:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 54.74^\circ$$

y sustituyendo en (7):

$$\omega_{\max} = -\frac{2\sqrt{3}v_{0x}}{l}$$

(NOTA: Este resultado se podría haber obtenido también haciendo  $d\omega/d\theta = 0$  en la ecuación (7), para calcular directamente el máximo de  $\omega$ ; el resultado es el mismo.)