Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

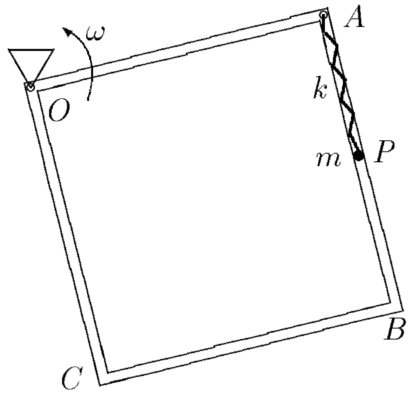
Mecánica

1^er^ EXAMEN PARCIAL (9 de febrero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 60 min.

Un cuadrado indeformable $OABC$, formado por 4 varillas huecas de longitud l cada una, se mueve en un plano horizontal alrededor del vértice fijo O con velocidad de giro constante ω. En el lado AB, según indica la figura, puede moverse sin rozamiento una partícula P de masa m, unida al vértice A mediante un resorte de constante k y longitud nula sin tensión. Se pide:

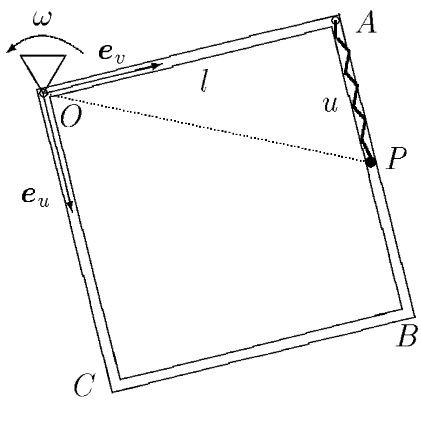


1. Aceleración absoluta de P, en sus componentes normal y tangencial a AB, para un instante genérico. Se tomará como parámetro $u = AP$.

2. Ecuación diferencial del movimiento de P relativo a AB.

3. Suponiendo que inicialmente $u(0) = u_0$ y $\dot{u}(0) = 0$, estudiar la posibilidad de equilibrio relativo estable, en función de la relación entre ω y k.

4. Reacción de la varilla AB sobre P.



1.- La expresión general de la aceleración de P es

$$\boldsymbol{a}_P = \underbrace{\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{0}} + \underbrace{\dot{\Omega}}_{=0}\,\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{OP} - \Omega^2 \boldsymbol{OP} + 2\Omega \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{rel}}$$

Tomando los versores $(\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v)$ en dirección de OC y OA respectivamente, y considerando que $\boldsymbol{OP} = u\boldsymbol{e}_u + l\boldsymbol{e}_v$; $\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \dot{u}\boldsymbol{e}_u$; $\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \ddot{u}\boldsymbol{e}_u$, resultan las componentes de $\boldsymbol{a}_P$:

$$\boxed{a_u = -\omega^2 u + \ddot{u}; \quad a_v = -\omega^2 l + 2\omega\dot{u}} \tag{1}$$

2.- Basta con plantear la ecuación dinámica de la partícula en dirección u con la expresión de la aceleración obtenida en (1):

$$-\,ku = m(-\omega^2 u + \ddot{u}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u} + (k - m\omega^2)u = 0} \tag{2}$$

3.- Para el equilibrio relativo, al ser $\dot{u}(0) = 0$, basta con que sea $\ddot{u} = 0$. Examinando la ecuación (2), al ser $u(0) \neq 0$, el coeficiente de u debe anularse:

$$\boxed{k - m\omega^2 = 0.}$$

El equilibrio es indiferente, puesto que se produce para cualquier valor de u.

También se podría responder a este apartado integrando la ecuación (2), aunque no es necesario. Dependiendo del signo del coeficiente de u, denominando $\omega^* = \sqrt{|k/m - \omega^2|}$, la ecuación horaria vale $u(t) = u_0 \cos(\omega^* t)$ (para $k/m - \omega^2 > 0$) ó $u(t) = u_0 \cosh(\omega^* t)$ (para $k/m - \omega^2 \leq 0$). Queda claro que para $u = u_0$ (constante) debe ser $\omega^* = 0$.

4.- La reacción de la varilla se obtiene expresando mediante la aceleración calculada en (1) la dinámica transversal:

$$\boxed{R = m(-\omega^2 l + 2\omega\dot{u}).}$$