ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

1er EXAMEN PARCIAL (9 de Febrero de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

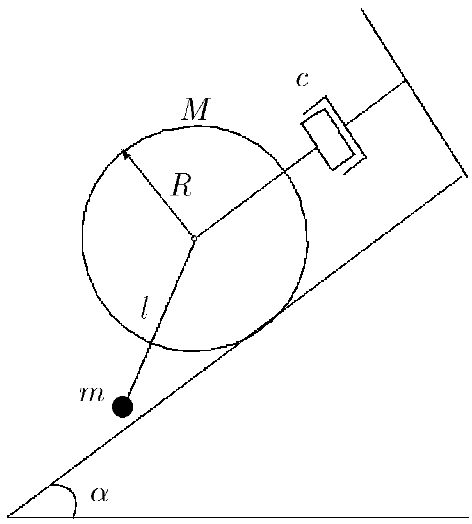
Ejercicio 5º Tiempo: 45 min.

Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α respecto de la horizontal. Del centro del disco cuelga un péndulo simple constituido por una varilla sin masa de longitud l con una masa puntual m en su extremo.

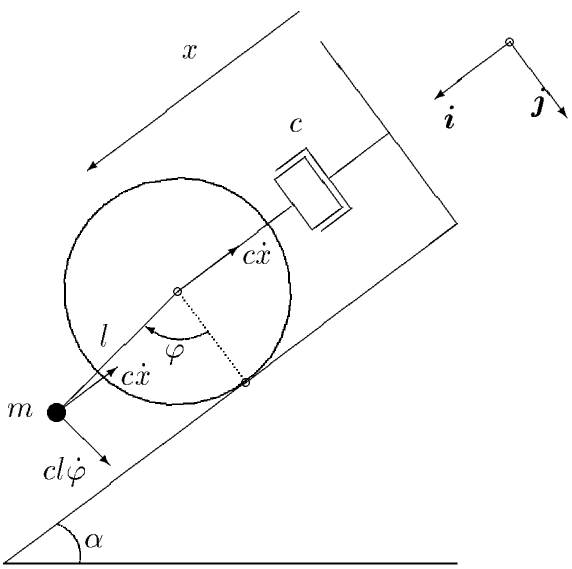
El centro del disco está unido a un punto fijo mediante un amortiguador viscoso de constante c que se opone al movimiento con una fuerza proporcional a la velocidad (ver figura).

Para considerar la resistencia del aire, se supone que sobre la masa puntual actúa una fuerza viscosa $\boldsymbol{F} = -c\boldsymbol{v}$, siendo $\boldsymbol{v}$ la velocidad de dicha masa.

Se pide:



1. Expresión de las fuerzas generalizadas correspondientes a las fuerzas viscosas.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento. Discutir la existencia de integrales primeras.



1.- El sistema tiene 2 g.d.l. para lo que tomamos como coordenadas generalizadas: x, desplazamiento del disco en el sentido descendente del plano; φ, ángulo absoluto girado por la varilla respecto de la perpendicular al plano.

Para obtener las fuerzas generalizadas calculamos el trabajo virtual para desplazamientos virtuales arbitrarios obtenidos a partir de δx y $\delta\varphi$. La expresión de las fuerzas viscosas para el disco y la masa puntual, referidas a los ejes cartesianos indicados en la figura, es respectivamente:

$$\boldsymbol{F}_d = -c\dot{x}\,\boldsymbol{i} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{F}_m = -(c\dot{x} + cl\dot{\varphi}\cos\varphi)\boldsymbol{i} + cl\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j} \tag{2}$$

Los correspondientes desplazamientos virtuales son:

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{r}_d &= \delta x\, \boldsymbol{i} && (3)\\ \delta \boldsymbol{r}_m &= (\delta x + l\cos\varphi\delta\varphi)\boldsymbol{i} - l\,\mathrm{sen}\,\varphi\delta\varphi\,\boldsymbol{j} && (4) \end{aligned}$$

El trabajo virtual correspondiente se obtiene haciendo:

$$\delta W = \boldsymbol{F}_d \cdot \delta \boldsymbol{r}_d + \boldsymbol{F}_m \cdot \delta \boldsymbol{r}_m$$

Sustituyendo (1;2;3;4) en esta expresión y agrupando en δx y $\delta\varphi$ se obtiene:

$$\delta W = (-2c\dot{x} - cl\dot{\varphi}\cos\varphi)\delta x + (-cl^2\dot{\varphi} - cl\dot{x}\cos\varphi)\delta\varphi \tag{5}$$

Las fuerzas generalizadas respectivas son los coeficientes de δx y $\delta\varphi$ en (5), resultando:

$$\begin{aligned} Q_x &= -2c\dot{x} - cl\dot{\varphi}\cos\varphi && (6)\\ Q_\varphi &= -cl^2\dot{\varphi} - cl\dot{x}\cos\varphi && (7) \end{aligned}$$

2.- La energía cinética del disco y de la masa puntual son respectivamente

$$T_d = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2, \qquad T_m = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

El potencial de las fuerzas gravitatorias es:

$$V = -Mgx\,\mathrm{sen}\,\alpha - mg(x\,\mathrm{sen}\,\alpha + l\cos(\varphi - \alpha)),$$

con lo que se obtiene la función Lagrangiana “parcial” del sistema:

$$L = T_d + T_m - V = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + Mgx\,\mathrm{sen}\,\alpha + mg(x\,\mathrm{sen}\,\alpha + l\cos(\varphi-\alpha)). \tag{8}$$

Esta Lagrangiana no contiene información alguna sobre las fuerzas viscosas no conservativas. Por ello, se deben incluir las fuerzas generalizadas correspondientes en las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi \tag{9}$$

Sustituyendo (6,7,8) en (9) y operando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}M + m\right)\ddot{x} + ml\ddot{\varphi}\cos\varphi - ml\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi - (M+m)g\,\mathrm{sen}\,\alpha &= -2c\dot{x} - cl\dot{\varphi}\cos\varphi\\ ml\ddot{x}\cos\varphi + ml^2\ddot{\varphi} + mgl\,\mathrm{sen}(\varphi - \alpha) &= -cl^2\dot{\varphi} - cl\dot{x}\cos\varphi \end{aligned}$$

Ninguna de las coordenadas es cíclica. Al actuar fuerzas no conservativas (las fuerzas viscosas) la energía no se conserva. Por otra parte tampoco existe la integral de Jacobi ya que aunque $\partial L/\partial t = 0$, L es una Lagrangiana “parcial” del sistema.