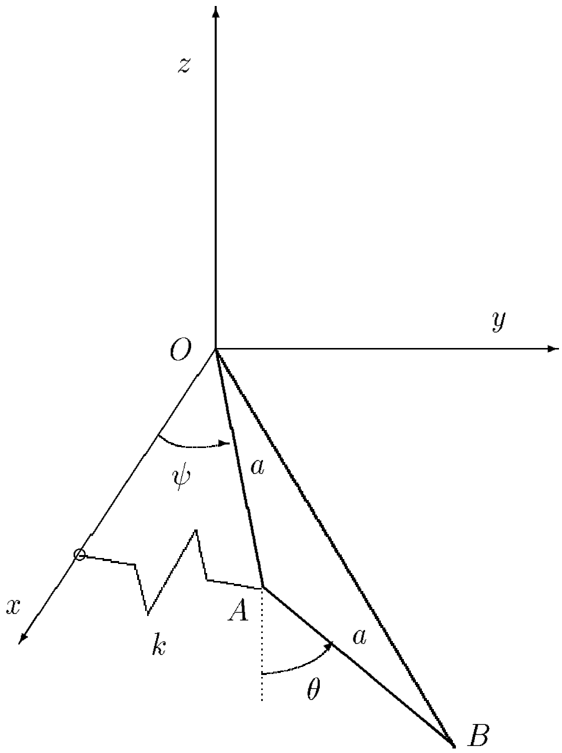
Mecánica

2º EXAMEN PARCIAL (10 de Junio de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 2º (20 ptos.) Tiempo: 90 min.

Una placa homogénea pesada tiene forma de triángulo rectángulo isósceles con masa m y lados $OA = AB = a$. El vértice O está fijo mientras que el A está obligado a permanecer en el plano horizontal Oxy mediante una ligadura lisa. Entre el vértice A y el punto $(a, 0, 0)$ existe además un resorte lineal, de constante k y longitud natural nula.
Se pide:



1. Tensor de inercia de la placa en el punto O, expresando sus componentes en el triedro móvil $Ox'y'z'$, donde Ox' sigue la recta OA, Oy' es paralelo a AB, y Oz' es perpendicular al plano de la placa formando con los anteriores un triedro a derechas.

2. Para una posición genérica, expresiones del momento cinético en O (componentes en el triedro $Ox'y'z'$), energía cinética y energía potencial.

3. Ecuaciones diferenciales del movimiento.

4. Integrales primeras, suponiendo que la placa parte del reposo desde la posición ($\psi_0 = 0, \theta_0 = \pi/6$).

5. Expresión de la reacción del plano en el punto A

6. Para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, y considerando el valor de la rigidez del muelle $k = mg/a$,

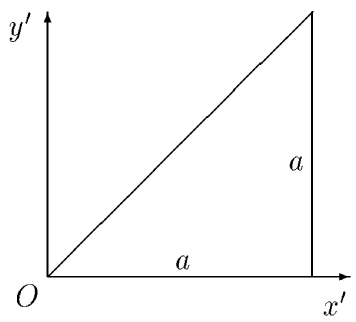
   (a) Ecuaciones del movimiento linealizadas

   (b) Frecuencias propias del movimiento

   (c) Modos normales de vibración

Nota leída por los altavoces: No será necesario resolver el apartado 5º

1.- Obtengamos en primer lugar los momentos y productos de inercia según los ejes definidos en el enunciado. Llamando $\rho = m/(a^2/2)$ a la densidad por unidad de área de la placa,



$$I_{x'} = \int_0^a (y')^2(a-y')\rho\,dy' = \frac{1}{12}\rho a^4 = \frac{1}{6}ma^2$$

$$I_{y'} = \frac{1}{6}ma^2 - m\left(\frac{a}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

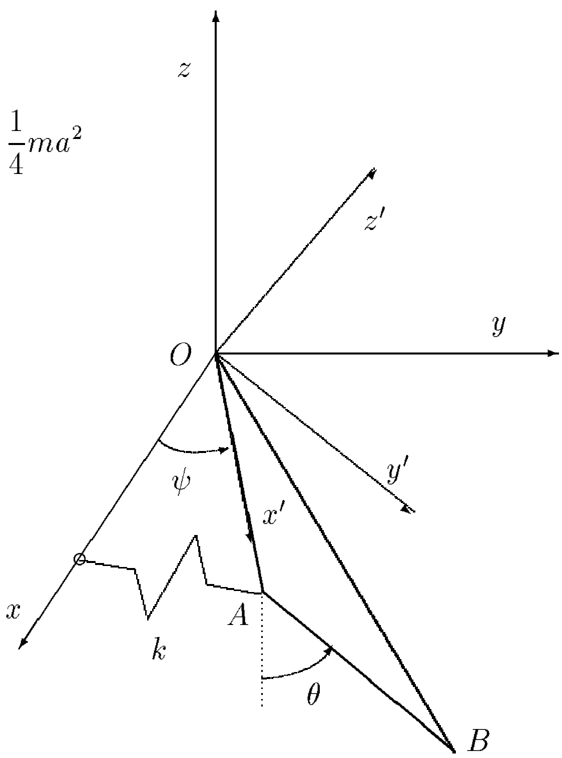
$$I_{z'} = I_{x'} + I_{y'} = \frac{2}{3}ma^2$$

$$P_{x'z'} = \rho\int_0^a x'\,dx\int_0^{x'} y'\,dy' = \rho\int_0^a \frac{(x')^3}{2}\,dx' = \rho\frac{a^4}{8} = \frac{1}{4}ma^2$$

$$P_{y'z'} = P_{z'x'} = 0$$

El tensor de inercia es por tanto

$$\boldsymbol{I}_O = ma^2\begin{pmatrix} 1/6 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad (1)$$



2.- Denotaremos por $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ a los versores del triedro $Oxyz$ y por $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ a los del $Ox'y'z'$. El vector velocidad angular es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{k} + \dot{\theta}\boldsymbol{i}' \qquad (2)$$

y considerando que $\boldsymbol{k} = -\cos\theta\,\boldsymbol{j}' + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}'$,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{i}' - \dot{\psi}\cos\theta\,\boldsymbol{j}' + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}' \qquad (3)$$

De aquí se obtiene directamente la expresión del momento cinético,

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = ma^2\left[\left(\frac{1}{6}\dot{\theta} + \frac{1}{4}\dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{i}' - \left(\frac{1}{4}\dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\cos\theta\right)\boldsymbol{j}' + \frac{2}{3}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}'\right]. \qquad (4)$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}ma^2\left[\frac{1}{6}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right], \qquad (5)$$

y la energía potencial, llamando δ a la elongación del muelle,

$$V = -mg\frac{a}{3}\cos\theta + \frac{1}{2}k\delta^2 = -mg\frac{a}{3}\cos\theta + ka^2(1-\cos\psi) \qquad (6)$$

3.- Obtendremos las ecuaciones del movimiento de Lagrange. La Lagrangiana es

$$L = T - V = \frac{1}{2}ma^2\left[\frac{1}{6}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right] + mg\frac{a}{3}\cos\theta - ka^2(1-\cos\psi) \quad (7)$$

Derivando ésta resultan las ecuaciones siguientes:

$$\frac{1}{6}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}ma^2\ddot{\psi}\cos\theta - \frac{1}{6}ma^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + mg\frac{a}{3}\operatorname{sen}\theta = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{4}ma^2\ddot{\theta}\cos\theta + ma^2\ddot{\psi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{3}ma^2\dot{\psi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + ka^2\operatorname{sen}\psi = 0 \quad (9)$$

4.- Ninguna de las coordenadas empleadas es cíclica. En cambio existe una integral primera debida a la constancia de $(T+V)$, al ser todas las fuerzas conservativas. Sustituyendo el valor de las condiciones iniciales del enunciado en la suma de (5) y (6) resulta

$$\frac{1}{2}ma^2\left[\frac{1}{6}\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{1}{2}\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right] - mg\frac{a}{3}\left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + ka^2(1-\cos\psi) = 0 \quad (10)$$

5.- La restricción que obliga al punto A a mantenerse sobre el plano liso Oxy produce una reacción normal al mismo que llamaremos R. Esta reacción no se halla en las ecuaciones de Lagrange, por lo que para obtenerla emplearemos las ecuaciones de Euler del movimiento, cuya expresión vectorial es

$$\boldsymbol{M}_O = \left.\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\right|_{rel} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_O \quad (11)$$

El momento de las fuerzas en O proviene de:

- la fuerza del muelle,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_O|_k &= a\boldsymbol{i}'\wedge[ka(1-\cos\psi)\boldsymbol{i} - ka\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{j}] \\
&= -ka^2\operatorname{sen}\psi\,\boldsymbol{k} \\
&= ka^2\operatorname{sen}\psi\cos\theta\,\boldsymbol{j}' - ka^2\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}'
\end{aligned}$$

- el peso,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_O|_w &= \left(\frac{2a}{3}\boldsymbol{i}' + \frac{a}{3}\boldsymbol{j}'\right)\wedge(-mg\boldsymbol{k}) \\
&= mg\frac{2a}{3}\cos\theta\,\boldsymbol{k}' + mg\frac{2a}{3}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}' - mg\frac{a}{3}\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{i}'
\end{aligned}$$

- la reacción vertical del plano en A,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_O|_R &= a\boldsymbol{i}'\wedge(-R\cos\theta\,\boldsymbol{j}' + R\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}') \\
&= -aR\cos\theta\,\boldsymbol{k}' - aR\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}'
\end{aligned}$$

Introduciendo estos momentos y desarrollando las componentes de las ecuaciones de Euler (11), resultan finalmente:

$$-mg\frac{a}{3}\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{6}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}ma^2\ddot{\psi}\cos\theta - \frac{1}{6}ma^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{12}$$

$$-aR\operatorname{sen}\theta + mg\frac{2a}{3}\operatorname{sen}\theta + ka^2\operatorname{sen}\psi\cos\theta = -\frac{1}{4}ma^2\ddot{\theta} - \frac{1}{2}ma^2\ddot{\psi}\cos\theta + \frac{1}{4}ma^2\dot{\psi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \tag{13}$$

$$-aR\cos\theta + mg\frac{2a}{3}\cos\theta - ka^2\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}ma^2\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3}ma^2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - \frac{1}{4}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}ma^2\dot{\psi}^2\cos^2\theta \tag{14}$$

La expresión de la reacción R del plano puede obtenerse tanto de la ecuación (13) como de (14), despejando y dejándola expresada en función de las coordenadas $(\theta,\ \psi)$ y sus derivadas de orden 1 y 2.

Por otra parte, podemos observar que la ecuación (12) coincide con la 1ª ecuación de Lagrange (8), mientras que la segunda ecuación de Lagrange (9) se obtiene sumando (13) multiplicada por $(\cos\theta)$ y (14) por $(-\operatorname{sen}\theta)$, operación que permite eliminar de las ecuaciones de Euler la reacción R.

6.- Linealizando las ecuaciones (8) y (9) para $(\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ pequeñas:

$$\frac{1}{6}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{4}ma^2\ddot{\psi} + \frac{1}{3}mga\theta = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{4}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ma^2\ddot{\psi} + ka^2\psi = 0 \tag{16}$$

de donde podemos identificar las matrices de masa y rigidez:

$$\mathbf{M} = ma^2\begin{pmatrix} 1/6 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}mga & 0 \\ 0 & ka^2 \end{pmatrix}$$

El movimiento libre para pequeñas oscilaciones se puede describir como las oscilaciones desacopladas de dos modos normales de vibración, cada uno con su frecuencia propia. Considerando que según el enunciado $ka^2 = mga$, la ecuación característica del problema de autovalores que proporciona las frecuencias propias es

$$0 = |\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = \frac{1}{3}\left(mga - \frac{1}{2}ma^2\omega^2\right)^2 - \left(\frac{1}{4}ma^2\omega^2\right)^2$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática en ω^2 son

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}\dfrac{g}{a} = 4(2+\sqrt{3})\dfrac{g}{a} \\[2ex] \omega_1^2 = \dfrac{4}{2+\sqrt{3}}\dfrac{g}{a} = 4(2-\sqrt{3})\dfrac{g}{a} \end{cases}$$

los vectores propios o modos normales de vibración correspondientes a estas frecuencias propias son respectivamente

$$\{\mathbf{u}_1\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ -1/\sqrt{3} \end{matrix}\right\}; \quad \{\mathbf{u}_2\} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \end{matrix}\right\}$$

(sin normalizar respecto de la matriz de masas).