

# Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1996)

Apellidos	Nombre	Nº	Grupo

Ejercicio 2º

Tiempo: 45 min.

Responder a las siguientes cuestiones teóricas *dentro del espacio provisto en la hoja* para cada una. Las respuestas habrán de ser breves y directas, escritas con letra clara y a tinta. Donde se pida *deducir* o *demostrar* un resultado, deberán justificarse debidamente todos los pasos, mientras que si se pide *discutir* debe realizarse una discusión razonada. Se repartirá una hoja adicional para borrador, que no se recogerá, no permitiéndose tener sobre la mesa *ninguna otra hoja*, ni calculadoras ni libros de ningún tipo.

*Deducción* de las ecuaciones de Euler para un sólido rígido con un punto fijo, con momentos de inercia  $A, B, C$  en direcciones principales. Proponer un *procedimiento de cálculo* de las reacciones en el caso de que el sólido gire alrededor de un eje fijo (1 punto fijo + 1 cojinete de revolución). (5 ptos.)

Siendo  $O$  fijo, el teorema del momento cinético permite afirmar que  $\mathbf{M}_O = d\mathbf{H}_O/dt$ . Expresando  $\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$  y derivando a través del sistema del cuerpo (en el que las componentes del tensor de inercia  $\mathbf{I}_O$  son constantes),

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Tomando las componentes en los ejes principales,  $\boldsymbol{\Omega} = (p, q, r)$  y  $\mathbf{M}_O = (M_x, M_y, M_z)$ , desarrollando la expresión anterior resultan las 3 ecuaciones (escalares) de Euler:

$$\begin{cases} M_x = A\dot{p} - (B - C)qr, \\ M_y = B\dot{q} - (C - A)rp, \\ M_z = C\dot{r} - (A - B)pq. \end{cases}$$

Sea ahora un sólido con un eje  $(O, \mathbf{e})$  fijo sobre el que actúan fuerzas exteriores activas con resultante  $\mathbf{F}^{act} = \sum \mathbf{f}_i^{act}$  y momento  $\mathbf{M}_O^{act} = \sum \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{f}_i^{act}$ . Suponemos el eje materializado por el punto  $O$  fijo y otro punto  $A$  que tiene impedido el movimiento transversal. Las reacciones en estos enlaces son  $\mathbf{R}_O$  (orientación arbitraria) y  $\mathbf{R}_A$  (normal al eje). Expresamos los teoremas de Momento cinético y Cantidad de movimiento:

$$\mathbf{OA} \wedge \mathbf{R}_A + \mathbf{M}_O^{act} = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (1)$$

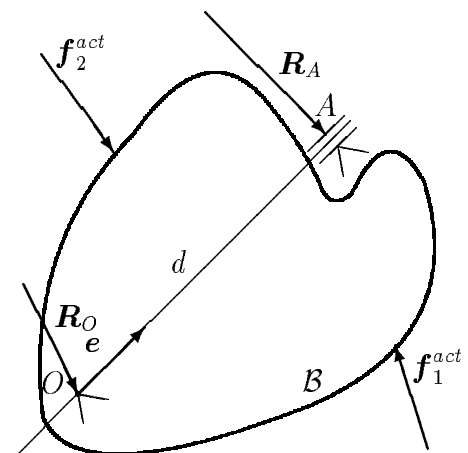
$$\mathbf{R}_O + \mathbf{R}_A + \mathbf{F}^{act} = M \underbrace{[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{OG})]}_{\mathbf{a}_G} \quad (2)$$

Conocidos  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$  y  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega} \mathbf{e}$ , despejaríamos  $\mathbf{R}_A$  de (1):

$$\mathbf{R}_A = \frac{[\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{M}_O^{act}] \wedge \mathbf{OA}}{|\mathbf{OA}|^2}$$

y por último, de (2),

$$\mathbf{R}_O = M \mathbf{a}_G - \mathbf{R}_A - \mathbf{F}^{act}$$



Enunciar y Demostrar las propiedades de ortogonalidad de los modos de vibración de un sistema de  $n$  grados de libertad con respecto a las matrices de masa y rigidez. (2.5 pts.)

Sean dos modos de vibración  $\{\mathbf{a}_k\}$  y  $\{\mathbf{a}_l\}$  correspondientes a autovalores distintos  $\lambda_k \neq \lambda_l$ . Se puede escribir

$$\lambda_k \mathbf{M}\{\mathbf{a}_k\} = \mathbf{K}\{\mathbf{a}_k\} \quad (1)$$

$$\lambda_l \mathbf{M}\{\mathbf{a}_l\} = \mathbf{K}\{\mathbf{a}_l\} \quad (2)$$

premultiplicando (1) por  $\{\mathbf{a}_l\}^T$  y (2) por  $\{\mathbf{a}_k\}^T$  y restando, resulta

$$(\lambda_k - \lambda_l)\{\mathbf{a}_k\}^T \mathbf{M}\{\mathbf{a}_l\} = 0$$

donde se ha hecho uso de la simetría de  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$ . Puesto que  $(\lambda_k - \lambda_l) \neq 0$  se obtiene la condición de ortogonalidad buscada:

$$\{\mathbf{a}_k\}^T \mathbf{M}\{\mathbf{a}_l\} = 0$$

o lo que es equivalente, considerando (2),

$$\{\mathbf{a}_k\}^T \mathbf{K}\{\mathbf{a}_l\} = 0$$

---

Definir sistema isostático y sistema hiperestático. (2.5 pts.)

En cualquier sistema en equilibrio (estático) se verifican las llamadas ecuaciones cardinales de la estática para el conjunto del sistema:

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Estas son por tanto condiciones *necesarias*. Sin embargo, pueden no ser *suficientes* para determinar las reacciones (internas o externas) en el sistema. Cuando son suficientes las 6 condiciones escalares dadas por (3) se dice que el sistema es *isostático*. Si por el contrario no son suficientes, se dice que es *hiperestático*. (En este último caso las ecuaciones que faltan se obtendrían a partir de la consideración de la deformabilidad de los cuerpos mediante la mecánica de medios continuos).