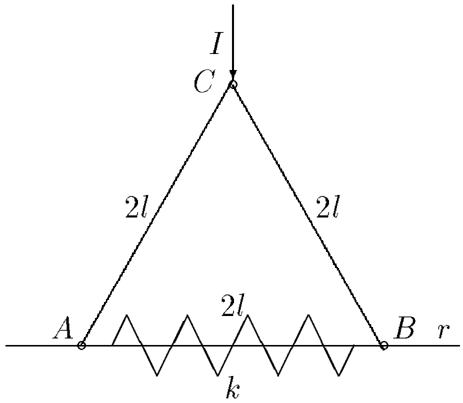
Mecánica

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1996)

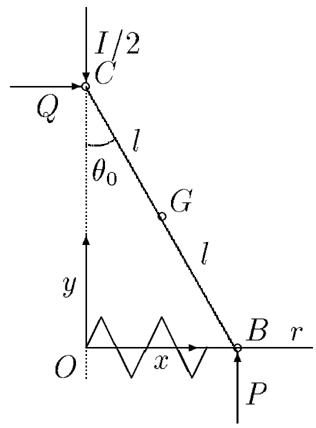
Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Ejercicio 3º Tiempo: 45 min.

El sistema de la figura está formado por dos barras iguales AC y BC de masa m y longitud $2l$, articuladas en C. El conjunto está situado en un plano horizontal, estando ligados A y B a una recta r mediante deslizaderas lisas. A su vez entre A y B existe un resorte lineal de constante k cuya longitud natural (posición inicial) es también $2l$. El sistema se utiliza para absorber un impacto I. Calcular el valor del mismo para que en el movimiento posterior las barras lleguen a estar alineadas.



La simetría existente respecto al eje Oy permite asegurar que C se moverá según la dirección del mismo, y los puntos A y B tendrán movimientos simétricos respecto del eje. Podemos estudiar pues tan sólo la barra BC, sobre la que repercutirá una percusión $I/2$, y a su vez sufrirá las percusiones reactivas Q (debido a la barra AC) y P (debido al enlace de la recta r).



Las posiciones y velocidades de G en un instante genérico son:

$$x_G = l \operatorname{sen}\theta; \quad y_G = l\cos\theta$$

$$\dot{x}_G = l\dot{\theta}\cos\theta; \quad \dot{y}_G = -l\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

Establecemos las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y momento cinético de BC en el instante de la percusión:

$$P - \frac{I}{2} = -ml\dot{\theta}_0 \operatorname{sen}\theta_0;$$

$$Q = ml\dot{\theta}_0\cos\theta_0;$$

$$\frac{I}{2}l\operatorname{sen}\theta_0 + Pl\operatorname{sen}\theta_0 - Ql\cos\theta_0 = \frac{1}{12}m(2l)^2\dot{\theta}_0.$$

Sustituyendo $\theta_0 = 30°$ y despejando se obtiene

$$\dot{\theta}_0 = \frac{3}{8}\frac{I}{ml}, \tag{1}$$

que es la velocidad angular adquirida por la barra debido a la percusión.

Para que las barras lleguen a alinearse, la energía cinética adquirida debe permitir que se alcance la posición $\theta = \pi/2$, siendo el mínimo necesario cuando se alcanza esta posición con velocidad nula. Establecemos la conservación de la energía entre ambas posiciones, teniendo en cuenta que $\left(v_G|_0\right)^2 = l^2\dot{\theta}_0^2$.

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}k(2l)^2\right]$$

donde se ha considerado que la energía potencial del resorte correspondiente a esta mitad simétrica es un medio del correspondiente al resorte completo sometido al alargamiento $2l$. De la ecuación anterior resulta la condición

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

y empleando la relación (**??**), para que se alcance o supere la posición alineada,

$$\boxed{I \geq \sqrt{\frac{32}{3}} l\sqrt{km}.}$$