Mecánica

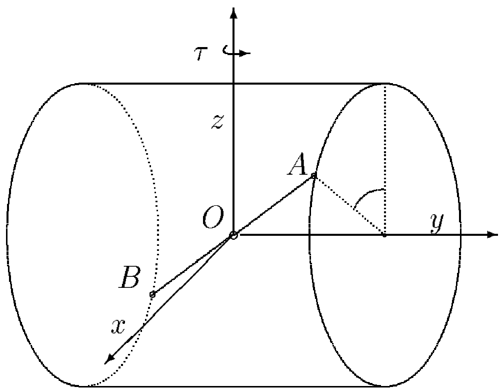
EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de Septiembre de 1996)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Ejercicio 5º Tiempo: 60 min.

Un cilindro hueco (sin tapas) de masa m, radio r y altura $2h$ puede girar libremente alrededor de un eje diametral fijo Oz que pasa por su centro. A su vez una barra homogénea AB de igual masa (m) se halla dentro del cilindro de forma que sus extremos A y B se mueven sin rozamiento sobre las circunferencias de las bases opuestas del cilindro, coincidiendo su centro con el del cilindro. Se aplica al cilindro un par τ según el eje z. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Valor del par τ para que el cilindro tenga un movimiento uniforme.



1.- Describiremos el movimiento mediante los ángulos θ (girado por el cilindro alrededor de Oz) y φ (giro de la barra respecto al cilindro alrededor de Oy, tomando el origen cuando A está en el punto más alto de la circunferencia). La expresión de la Lagrangiana del sistema es

$$L = T = \frac{1}{2} I_z^{\text{cil}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I^{\text{barra}} \Omega_n^2 \tag{1}$$

donde Ω_n es la componente de la velocidad de rotación de la barra normal a la misma, ya que según la propia barra su inercia es nula. Calculamos Ω_n mediante

$$\Omega_n^2 = \Omega^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{t})^2$$

donde $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{OA}/|\boldsymbol{OA}|$ es el versor de la barra, cuya longitud llamaremos $2l$, siendo $l = \sqrt{h^2 + r^2}$:

$$\boldsymbol{t} = \frac{1}{l}(r \operatorname{sen} \varphi,\, h,\, r \cos \varphi); \quad \boldsymbol{\Omega} = (0,\, \dot{\varphi},\, \dot{\theta});$$

$$\begin{aligned}
\Omega_n^2 &= (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) - \frac{1}{l^2}(h\dot{\varphi} + r\dot{\theta}\cos\varphi)^2 \\
&= \frac{1}{l^2}\left[r^2\dot{\varphi}^2 + (h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)\dot{\theta}^2 - 2hr\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi\right]
\end{aligned}$$

Los momentos de inercia son

$$I_z^{\text{cil}} = m\left(\frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{2}\right), \quad I^{\text{barra}} = \frac{1}{3} m l^2.$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta la expresión de la Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{2}\right)\dot{\theta}^2 + \frac{m}{6}\left[r^2\dot{\varphi}^2 + (h^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\varphi)\dot{\theta}^2 - 2hr\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi\right] \tag{2}$$

Para obtener las ecuaciones de Lagrange derivamos e incluimos como fuerza generalizada según la coordenada θ el par externo τ:

$$\frac{m}{3}r^2\ddot{\varphi} - \frac{m}{3}hr\ddot{\theta}\cos\varphi - \frac{m}{3}r^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = 0 \tag{3}$$

$$\frac{m}{3}\left(2h^2 + \frac{3}{2}r^2 + r^2\operatorname{sen}^2\varphi\right)\ddot{\theta} + \frac{2m}{3}r^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{m}{3}hr\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{m}{3}hr\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi = \tau \tag{4}$$

2.- El movimiento uniforme corresponde a $\dot{\theta} = \omega$; $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = 0$. Sustituyendo en (4):

$$\tau = \frac{2m}{3}r^2\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{m}{3}hr\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{m}{3}hr\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi; \tag{5}$$

y sustituyendo en (3):

$$\ddot{\varphi} = \omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,$$

ecuación que a su vez admite una integral directa,

$$\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\operatorname{sen}^2\varphi,$$

siendo la constante $\dot{\varphi}_0$ el valor de $\dot{\varphi}$ en $\varphi = 0$. Eliminando de esta manera $\ddot{\varphi}$ y $\dot{\varphi}$ en la ecuación (5) queda finalmente:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2m}{3}r^2\omega\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{m}{3}hr\omega^2\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi \\ &\quad + \frac{m}{3}hr(\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{\tau(\varphi) = \frac{2m}{3}r^2\omega\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{m}{3}hr\operatorname{sen}\varphi[\dot{\varphi}_0^2 + \omega^2(2\operatorname{sen}^2\varphi - 1)]}$$