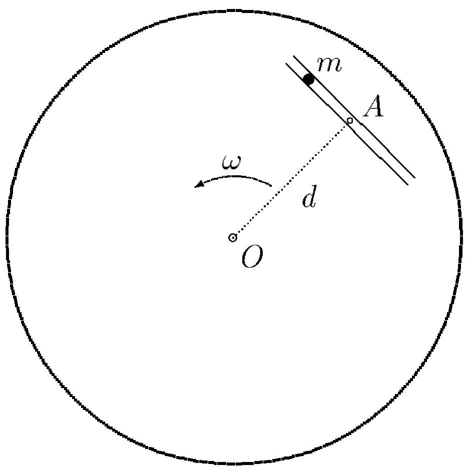
MECANICA

Practica nº 10 curso 95-96

46. Para el problema nº 3 (práctica 1), responder a las siguientes cuestiones adicionales.

6. Obtener la Lagrangiana y ecuación de Lagrange del sistema.
7. En el caso que exista alguna integral primera, obtener ésta. Razonar si se conserva o no la energía total del sistema.
8. Calcular la reacción que establece el enlace bilateral mediante multiplicadores de Lagrange, así como el momento necesario para mantener la velocidad angular ω constante.
9. Repetir los apartados 6 y 7 en el supuesto en el que el disco pueda girar libremente, sin que tenga un movimiento impuesto con ω constante.



47. Un semiaro de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta horizontal, manteniéndose dentro de un plano vertical. Sobre el semiaro desliza una partícula de masa m con ligadura bilateral lisa. Se pide:

a. Ecuaciones del movimiento;

b. Integrales primeras, caso de haberlas.

c. Calcular la reacción que ejerce el semiaro sobre la partícula y la recta horizontal sobre el semiaro.

48. Un disco homogéneo de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre una recta r, manteniéndose vertical. De su centro cuelga, mediante una articulación, una varilla de masa m y longitud $l < R$. En el extremo inferior de esta varilla actúa una fuerza horizontal, de valor $f = A \operatorname{sen} \Omega t$. El conjunto está sometido además a la acción de la gravedad. Se pide:

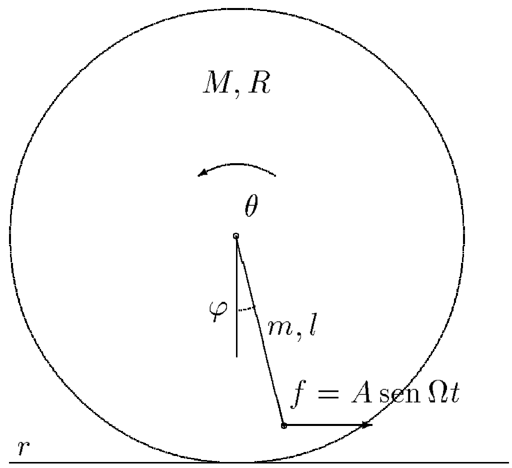
a. Tomando como coordenadas el giro del disco θ y el ángulo de la varilla con la vertical φ, expresar el trabajo δW para un desplazamiento virtual arbitrario.

b. Fuerzas generalizadas según las coordenadas anteriores.

c. Ecuaciones de Lagrange del movimiento.

d. Discutir la existencia o no de integrales primeras y obtenerlas en su caso.

e. Reacción tangencial de la recta sobre el disco, empleando multiplicadores de Lagrange.



49. Una hélice tiene por ecuaciones en coordenadas cilíndricas $\rho = b, \quad z = a\varphi$, siendo a y b constantes. Sobre ella se mueve sin rozamiento una partícula de masa m, que además se encuentra atraída desde el origen de coordenadas por una fuerza proporcional a la distancia, con constante k. Se pide:

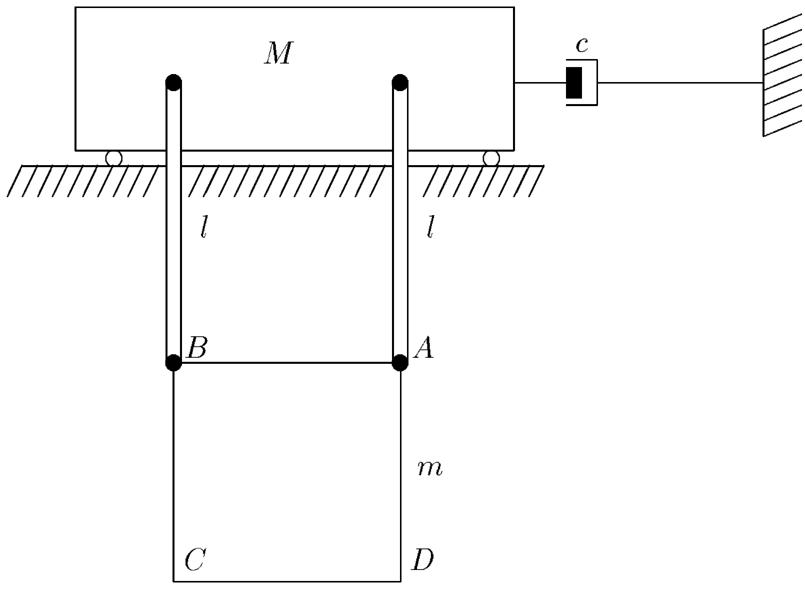
1. Obtener las ecuaciones del movimiento e integrales primeras en su caso;

2. Reacción de la hélice sobre la partícula mediante multiplicadores de Lagrange;

3. Las mismas cuestiones, suponiendo ahora que la hélice es en realidad una acanaladura en la superficie de un cilindro macizo vertical de masa M, que puede girar libremente alrededor de su eje.

50. Una placa cuadrada $ABCD$, de masa m, está colgada de un carretón de masa M, mediante dos varillas inextensibles de masa despreciable y longitud l, articuladas en sus extremos (ver figura). La placa sólo puede moverse en su plano y el carretón puede desplazarse en el mismo plano sobre la recta horizontal en que se apoya, sin rozamiento y con un amortiguador viscoso de constante c. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento. ¿Existen Integrales Primeras?
2. En el caso particular en que $c = 0$, si la placa se suelta estando el sistema en reposo con las varillas horizontales, calcular:
   (a) Desplazamiento del carretón cuando la placa llega al punto más bajo de su trayectoria.
   (b) Velocidad del carretón en dicho instante.

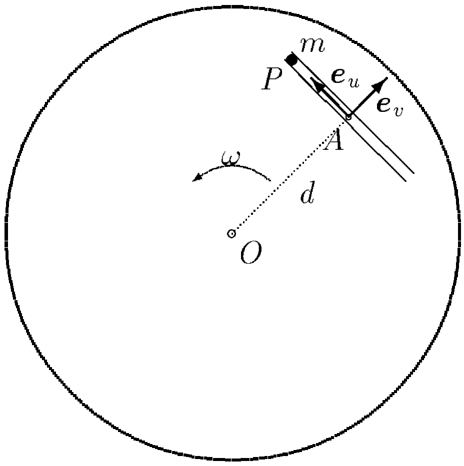


MECANICA

Practica n$^{\underline{o}}$ 10 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio n$^{\underline{o}}$ 46.-



6.- La ley $u(t)$ define el movimiento relativo a la ranura, que a su vez tiene un movimiento solidario al disco. Denominamos $\boldsymbol{e}_u$ al versor en la dirección de la ranura, y $\boldsymbol{e}_v$ en la dirección normal a la misma. La velocidad tiene, además de la componente de arrastre por la rotación del disco, la velocidad relativa en la dirección de la ranura:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{arr} &= d\omega\boldsymbol{e}_u - u\omega\boldsymbol{e}_v \\ \boldsymbol{v}_{rel} &= \dot{u}\boldsymbol{e}_u \end{aligned}$$

Por tanto las componentes de la velocidad absoluta son

$$\boxed{v_u = d\omega + \dot{u}; \qquad v_v = -u\omega} \tag{1}$$

La energía cinética es pues

$$T = \frac{1}{2}m(\omega^2d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2u^2); \tag{2}$$

e incluyendo el potencial del muelle la Lagrangiana resulta,

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m(\omega^2d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2u^2) - \frac{1}{2}ku^2}$$

La ecuación de Lagrange correspondiente es

$$m\ddot{u} - m\omega^2u + ku = 0, \tag{3}$$

que es la misma que se obtuvo en el problema n$^{\underline{o}}$ 3 (práctica 1) por procedimientos "Newtonianos".

7.- Puesto que la Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, se conserva la integral de Jacobi:

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\dot{u} - L = \text{cte.}$$

Desarrollando esta expresión y obteniendo la constante a partir de las condiciones iniciales,

$$h = \frac{1}{2}m(-\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 - \omega^2 u^2) + \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}m(-\omega^2 d^2 - \omega^2 u_0^2) + \frac{1}{2}ku_0^2. \quad (4)$$

Resulta finalmente

$$\boxed{\frac{1}{2}m\left(\dot{u}^2 - \omega^2(u^2 - u_0^2)\right) + \frac{1}{2}k(u^2 - u_0^2) = 0}$$

Ecuación que coincide con la integral primera obtenida en el ejercicio 3, aptdo 5. La expresión de la energía total es

$$T + V = \frac{1}{2}m(\omega^2 d^2 + \dot{u}^2 + 2\omega d\dot{u} + \omega^2 u^2) + \frac{1}{2}ku^2;$$

ésta no coincide con la integral de Jacobi (4), debido a que la coordenada u es relativa al disco móvil, y la expresión (2) de T no resulta por tanto homogénea de grado 2 en $\dot{u}$. No se conserva la energía total del sistema, debido a que para mantener el movimiento del disco es necesario realizar un trabajo mediante algún agente externo al sistema, que varía la energía del mismo.

8.- Para el cálculo de la reacción que establece el enlace bilateral admitimos que la masa m pueda moverse fuera de la ranura. Empleando para ello la cordenada v definida de forma que $v = \boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{e}_v$, la partícula posee dos grados de libertad v y u. Las componentes de la velocidad serán en este caso:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{arr} &= v\omega\boldsymbol{e}_u - u\omega\boldsymbol{e}_v \\ \boldsymbol{v}_{rel} &= \dot{u}\boldsymbol{e}_u + \dot{v}\boldsymbol{e}_v \end{aligned}$$

$$\boxed{v_u = v\omega + \dot{u}; \qquad v_v = \dot{v} - u\omega} \quad (5)$$

La energía cinética resulta:

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + 2\omega v\dot{u} - 2\dot{v}u\omega + \omega^2(u^2 + v^2)] \quad (6)$$

y por tanto la expresión de la Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + 2\omega v\dot{u} - 2\dot{v}u\omega + \omega^2(u^2 + v^2)] - \frac{1}{2}ku^2 \quad (7)$$

La ecuación de restricción correspondiente a la ranura se expresa como $v = d$ y el desplazamiento virtual resulta, por tanto, $\delta v = 0$ dando lugar al coeficiente $A^v = 1$.

La ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada v se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial v} = \lambda A^v \tag{8}$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. Desarrollando las derivadas:

$$m\ddot{v} - 2m\omega\dot{u} - m\omega^2 v = \lambda$$

sabiendo $\ddot{v} = 0$, $v = d$ y que la reacción vale $R_v = \lambda A^v$:

$$\boxed{R_v = -2m\omega\dot{u} - m\omega^2 d}$$

Expresión que coincide con la calculada en el ejercicio 3 (ecuación (8) en el aptdo. 4).

Para la obtención del momento necesario para mantener constante la velocidad angular ω, se introduce un nuevo grado de libertad φ correspondiente a la posición angular del disco junto con la ecuación de restricción $\dot{\varphi} = \omega$.

En esta ocasión las componentes de la velocidad de la masa m son:

$$\boxed{v_u = d\dot{\varphi} + \dot{u}; \qquad v_v = -u\dot{\varphi}} \tag{9}$$

y la Lagrangiana se expresa por tanto como:

$$L = \frac{1}{2}m(u^2\dot{\varphi}^2 + d^2\dot{\varphi}^2 + \dot{u}^2 + 2\dot{\varphi}d\dot{u}) - \frac{1}{2}ku^2 \tag{10}$$

La ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada φ, introduciendo un multiplicador μ, se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \mu A^\varphi \tag{11}$$

La ecuación de restricción se expresa como $\dot{\varphi} = \omega$ dando lugar al desplazamiento virtual $\delta\varphi = 0$ y por tanto al coeficiente $A^\varphi = 1$. Desarrollando las derivadas resulta:

$$mu^2\ddot{\varphi} + 2mu\dot{u}\dot{\varphi} + md^2\ddot{\varphi} + md\ddot{u} = \mu$$

sabiendo que $\ddot{\varphi} = 0$, identificando $\varphi = \omega$ y $Q^\varphi = \mu$ como el momento pedido y eliminando $\ddot{u}$ mediante la ecuación (3), se obtiene finalmente:

$$\boxed{Q^\varphi = 2mu\dot{u}\omega + m\omega^2 du - kdu}$$

9.- En este caso la partícula m posee dos grados de libertad u y φ, pero sin que la velocidad angular $\dot{\varphi}$ esté sujeta a ninguna restricción. La Lagrangiana se expresa, al igual que en el apartado anterior (ecuación (10)), como:

$$L = \frac{1}{2}m(u^2\dot{\varphi}^2 + d^2\dot{\varphi}^2 + \dot{u}^2 + 2\dot{\varphi}d\dot{u}) - \frac{1}{2}ku^2 \tag{12}$$

La ecuación de Lagrange asociada a las coordenada u resulta:

$$m\ddot{u} + md\ddot{\varphi} - mu\dot{\varphi}^2 + ku = 0. \tag{13}$$

Se comprueba fácilmente que la coordenada φ es cíclica dado que $\partial L/\partial\varphi = 0$. Se obtiene por tanto la integral primera:

$$\boxed{(mu^2 + md^2)\dot{\varphi} + md\dot{u} = C.} \tag{14}$$

Además se comprueba fácilmente que la Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo por lo que se conserva la integral de Jacobi. En esta ocasión dado que la energía cinética es una función homogénea de segundo grado dicha integral sí coincide con la energía total:

$$h = T + V = \boxed{\frac{1}{2}m(u^2\dot{\varphi}^2 + d^2\dot{\varphi}^2 + \dot{u}^2 + 2\dot{\varphi}d\dot{u}) + \frac{1}{2}ku^2 = E.} \tag{15}$$

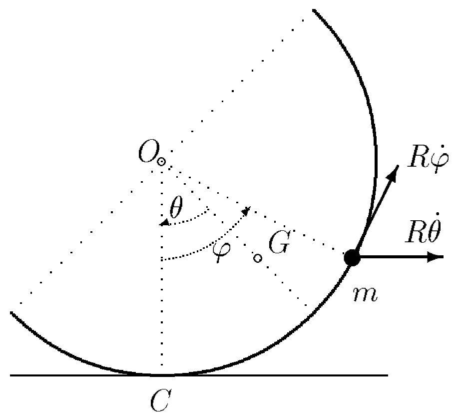
De este modo las ecuaciones (14) y (15) constituyen las dos integrales primeras del movimiento.

Ejercicio nº 47.-

a.- Se toman como parámetros θ (giro del semiaro, positivo en sentido horario) y φ (ángulo con la vertical que define la posición de m relativa al aro, positivo en sentido antihorario), tal como indica la figura.

Por el th. de Guldin se obtiene:

$$OG = 2R/\pi$$



La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

siendo I_C el momento de inercia respecto del centro de rotación instantáneo, C, y v la velocidad absoluta de la masa m. Otenemos I_C aplicando el th. de Steiner:

$$\begin{aligned}
I_G &= I_O - M(OG)^2 = MR^2 - M\frac{4R^2}{\pi^2} \\
I_C &= I_G + M(GC)^2 = I_G + MR^2\left(1 + \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi}\cos\theta\right) \\
&= 2MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

Por otra parte, la velocidad v se obtiene sumando (vectorialmente) el arrastre del semiaro y el movimiento relativo,

$$v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

La lagrangiana es por tanto

$$\begin{aligned}
L = T - V &= MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi) \\
&\quad + Mg\frac{2R}{\pi}\cos\theta + mgR\cos\varphi
\end{aligned}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned}
0 &= \left[2MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right) + mR^2\right]\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\varphi}\cos\varphi - mR^2\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi \\
&\quad + \frac{2}{\pi}MR^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + Mg\frac{2R}{\pi}\operatorname{sen}\theta \\
0 &= mR^2\ddot{\theta}\cos\varphi + mR^2\ddot{\varphi} + mgR\operatorname{sen}\varphi
\end{aligned}$$

b.- Al ser todas las fuerzas conservativas, la energía total se conserva, existiendo pues esta integral primera:

$$\begin{aligned}
E = T + V &= MR^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi) \\
&\quad - Mg\frac{2R}{\pi}\cos\theta - mgR\cos\varphi
\end{aligned}$$

c.- Para calcular la reacción que ejerce el semiaro sobre la partícula mediante multiplicadores de Lagrange, se libera la restricción que obliga a la partícula a moverse sobre el aro. Se introducen grados de libertad adicionales que permitan a la partícula salirse del aro, imponiendo explícitamente la ecuación de ligadura a continuación. Para ello descomponemos el movimiento de la partícula en un arrastre debido a la traslación del centro O del semiaro (sin rotación) cuyo desplazamiento es $R\theta$ horizontal, y las coordenadas (r, φ) polares para la partícula sobre el aro. Por tanto la velocidad será:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{rel} &= \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi \\ \boldsymbol{v}_{arr} &= R\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{u}_r + R\dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{u}_\varphi \end{aligned}$$

La energía cinética se expresa por tanto como:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{r}R\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi + 2rR\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi).$$

De este modo la Lagrangiana se expresa como:

$$\begin{aligned} L &= MR^2(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{r}R\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi + 2rR\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi) \\ &\quad + Mg\frac{2R}{\pi}\cos\theta + mgr\cos\varphi \end{aligned}$$

La ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada r se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda A^r \tag{1}$$

La ecuación de restricción $r = R$ da lugar a un desplazamiento virtual $\delta r = 0$ y, por tanto, el coeficiente $A^r = 1$. La ecuación (1) resulta, identificando $R_r = \lambda$ y sabiendo que $\ddot{r} = 0$:

$$\boxed{R_r = \lambda = mR\ddot{\theta}\operatorname{sen}\varphi - mR\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi} \tag{2}$$

Para el cálculo de la reacción que ejerce la recta sobre el semiaro se introducen las coordenadas nuevas x e y que corresponden a una traslación arbitraria del semiaro, imponiéndose después la ecuación de ligadura correspondiente a la rodadura.

La energía cinética del semiaro se expresa como:

$$T_{\text{semiaro}} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2$$

La velocidad de G es

$$v_G^2 = \left[\dot{x} + \dot{\theta}\left(R - \frac{2R}{\pi}\cos(-\theta)\right)\right]^2 + \left[\dot{y} - \dot{\theta}\frac{2R}{\pi}\operatorname{sen}(-\theta)\right]^2$$

con lo que

$$\begin{aligned} T_{\text{semiaro}} &= \frac{1}{2}M\left[\dot{x}^2+\dot{y}^2+2\dot{x}\dot{\theta}R\left(1-\frac{2}{\pi}\cos\theta\right)\right.\\ &\left.-2\dot{y}\dot{\theta}R\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\theta+\dot{\theta}^2R^2\left(2-\frac{4}{\pi}\cos\theta\right)\right] \end{aligned}$$

La velocidad de la partícula se expresa como:

$$\boldsymbol{v}=(\dot{x}+R\dot{\varphi}\cos\varphi+R\dot{\theta})\boldsymbol{i}+(\dot{y}+R\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{j} \tag{3}$$

La energía cinética de la partícula resulta:

$$T_{\text{particula}}=\frac{1}{2}m[(\dot{x}+R\dot{\varphi}\cos\varphi+R\dot{\theta})^2+(\dot{y}+R\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi)^2] \tag{4}$$

El potencial es

$$V=Mg\left(y-\frac{2R}{\pi}\cos\theta\right)+mg(y-R\cos\varphi)$$

Sumando estos términos se obtiene la Lagrangiana:

$$L=T_{\text{semiaro}}+T_{\text{particula}}-V$$

La ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada x se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=\lambda_1A_1^x \tag{5}$$

La ecuación de restricción corresponde a la rodadura expresada como $\dot{x}=0$. Los desplazamientos virtuales resultan por tanto $\delta x=0$ dando lugar a los coeficientes $A_1^x=1$ y $A_1^\theta=0$. La ecuación (5) permite calcular la reacción horizontal identificando $R_x=\lambda_1$ y sustituyendo $\ddot{x}=0$:

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= \lambda_1=(M+m)R\ddot{\theta}+MR\ddot{\theta}\left(-\tfrac{2}{\pi}\cos\theta\right)\\ &\quad+MR\dot{\theta}^2\tfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}\theta+mR\ddot{\varphi}\cos\varphi-mR\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}}$$

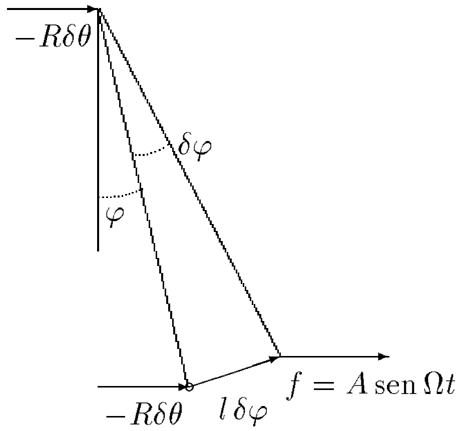
Análogamente la ecuación de Lagrange correspondiente a la coordenada y se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=\lambda_2A_2^y \tag{6}$$

La ecuación de restricción corresponde al apoyo sobre la recta, expresada como $y=0$. Los desplazamientos virtuales asociados resultan por tanto $\delta y=0$ dando lugar al coeficiente $A_2^y=1$. La ecuación (6) permite calcular la reacción vertical de forma similar, identificando $R_y=\lambda_2$ y sabiendo que $\ddot{y}=0$:

$$\boxed{R_y=\lambda_2=(M+m)g+MR\ddot{\theta}\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\theta+MR\dot{\theta}^2\frac{2}{\pi}\cos\theta+mR\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi+mR\dot{\varphi}^2\cos\varphi}$$

Ejercicio nº 48.-



a.- Tomando desplazamientos virtuales $\delta\theta$ y $\delta\varphi$, la expresión del trabajo de f es

$$\boxed{\delta W = (-R\,\delta\theta + l\,\delta\varphi\cos\varphi)A\,\mathrm{sen}\,\Omega t,}$$

b.- Identificando coeficientes en la expresión anterior

$$\boxed{Q_\theta = -RA\,\mathrm{sen}\,\Omega t; \quad Q_\varphi = lA\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\Omega t.}$$

c.- La energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M(R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot\theta^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2\dot\varphi^2}{4} + R^2\dot\theta^2 - lR\dot\theta\dot\varphi\cos\varphi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\dot\varphi^2. \end{aligned}$$

La atracción gravitatoria proviene de un potencial $V = -mg(l/2)\cos\varphi$. Sería posible incluir su efecto a través de δW y las fuerzas generalizadas correspondientes, pero es preferible tenerlas en cuenta mediante una Lagrangiana parcial, $L = T - V$. En función de L y de las fuerzas Q_θ, Q_φ calculadas antes, las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}M + m\right)R^2\ddot\theta - \frac{1}{2}mlR\ddot\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}mlR\dot\varphi^2\,\mathrm{sen}\,\varphi &= -AR\,\mathrm{sen}\,\Omega t, \\ \frac{1}{3}ml^2\ddot\varphi - \frac{1}{2}mlR\ddot\theta\cos\varphi + mg\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi &= lA\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\Omega t. \end{aligned}$$

d.- Aunque $\partial L/\partial\theta = 0$, la coordenada θ no es cíclica, ya que existe una fuerza Q_θ en esa dirección. La energía total tampoco se conserva, por la acción de la fuerza f no conservativa. Por tanto <u>no existen integrales primeras</u>.

Para calcular la reacción horizontal de la rodadura, imponemos la coacción de rodadura a través de un multiplicador de Lagrange. Llamando x al desplazamiento horizontal del centro del disco (positivo hacia la derecha) y θ al giro del mismo, la ecuación de ligadura es

$$\dot x + R\dot\theta = 0,$$

lo que para desplazamientos virtuales $\delta\theta$, δx, $\delta\varphi$ equivale a

$$\delta x + R\,\delta\theta = 0.$$

Los coeficientes de esta expresión son pues

$$A^x = 1, \quad A^\theta = R, \quad A^\varphi = 0.$$

Estos coeficientes, afectados por el multiplicador λ, son los que hay que incluir en el lado derecho de las ecuaciones de Lagrange. Para hallar estas, debemos reformular L en función de x, θ y φ, considerando x y θ independientes:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{l^2\dot{\varphi}^2}{4} + \dot{x}^2 - l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + \frac{1}{24}ml^2\dot{\varphi}^2 + mg\frac{l}{2}\cos\varphi.$$

Asimismo, la nueva expresión de δW debido a f es

$$\delta W = (\delta x + l\,\delta\varphi\cos\varphi)A\operatorname{sen}\Omega t,$$

de donde se obtiene

$$Q_x = A\operatorname{sen}\Omega t; \quad Q_\varphi = lA\cos\varphi\operatorname{sen}\Omega t; \quad Q_\theta = 0.$$

La ecuación de Lagrange en x es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x + \lambda A^x \\ (M+m)\ddot{x} - \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi &= A\operatorname{sen}\Omega t + \lambda \end{aligned}$$

La reacción horizontal es precisamente el valor de λ,

$$\boxed{R_x = \lambda = (M+m)\ddot{x} - \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi - A\operatorname{sen}\Omega t.}$$

O bien en función de θ,

$$R_x = -(M+m)R\ddot{\theta} - \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi - A\operatorname{sen}\Omega t.$$

Ejercicio nº 49.-

La expresión general de la Lagrangiana es, en coordenadas cilíndricas,

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2),$$

sujeto a las ligaduras (holónomas) $\rho = b$, $z = a\varphi$.

1.- Eliminamos las ligaduras, dejando como único g.d.l. φ:

$$L = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k(b^2 + a^2\varphi^2).$$

Derivando se obtiene la ecuación de Lagrange correspondiente,

$$m(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} + ka^2\varphi = 0. \tag{1}$$

Se conserva la energía total,

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}k(b^2 + a^2\varphi^2). \tag{2}$$

2.- Empleamos ahora la expresión general de L, introduciendo las ligaduras mediante multiplicadores,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= 0, && (3) \\ \dot{z} - a\dot{\varphi} &= 0, && (4) \end{aligned}$$

de lo que resultan los coeficientes

$$A_1^\rho = 1, \quad A_1^z = 0, \quad A_1^\varphi = 0,$$
$$A_2^\rho = 0, \quad A_2^z = 1, \quad A_2^\varphi = -a.$$

Empleando los multiplicadores λ y μ, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + k\rho &= \lambda, && (5) \\ 2m\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + m\rho^2\ddot{\varphi} &= -a\mu, && (6) \\ m\ddot{z} + kz &= \mu. && (7) \end{aligned}$$

Resultan entonces 5 ecuaciones (5, 6, 7, 3, 4) y 5 incógnitas: ρ, φ, z, λ, μ.

La reacción de la hélice tiene una componente dirigida hacia el eje de valor $R_\rho = \lambda$, otra en dirección axial de valor $R_z = \mu$ y otra en dirección tangencial según φ, de valor $R_\varphi = -a\mu/b$.

Podemos despejar los valores de λ y μ de las ecuaciones, obteniendo

$$\begin{aligned} \lambda &= -mb\dot{\varphi}^2 + kb, \\ \mu &= ma\ddot{\varphi} + ka\varphi. \end{aligned}$$

3.- Llamemos θ al ángulo girado por el cilindro, φ será el ángulo de la partícula relativo a la hélice solidaria con el cilindro. Las ecuaciones de ligadura son las mismas (3), (4) al definir φ como ángulo relativo. La expresión de la Lagrangiana es ahora

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mb^2\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(\rho^2 + z^2).$$

Derivando obtenemos las ecuaciones de Lagrange,

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + k\rho &= \lambda, & (8) \\ 2m\rho\dot{\rho}(\dot{\varphi} + \dot{\theta}) + m\rho^2(\ddot{\varphi} + \ddot{\theta}) &= -a\mu, & (9) \\ m\ddot{z} + kz &= \mu. & (10) \end{aligned}$$

En la dirección θ es $\partial L/\partial\theta = 0$; Al no existir multiplicador en esa dirección, la fuerza generalizada es también nula, por lo que se trata de una coordenada cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\rho^2(\dot{\varphi} + \dot{\theta}) + \frac{1}{2}Mb^2\dot{\theta} = \text{cte.} \tag{11}$$

Las componentes de la reacción ejercida por la hélice siguen siendo λ, μ y $-a\mu/b$. De (8) y (3) se obtiene

$$\lambda = -mb(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2 + kb,$$

Tomamos como condiciones iniciales en $t = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, con lo cual se anula la constante de integración en (11); Eliminando $\dot{\theta}$ de esta ecuación,

$$\dot{\theta}(mb^2 + \frac{1}{2}Mb^2) = -mb^2\dot{\varphi},$$

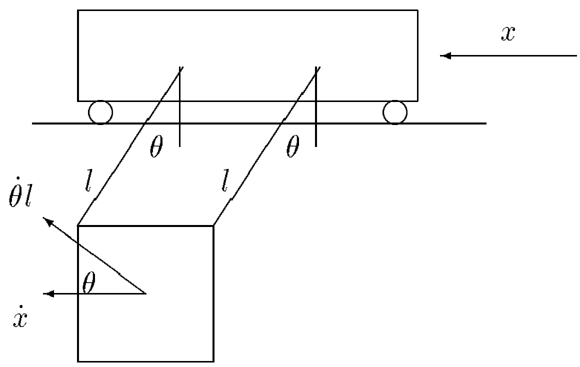
con lo que resulta

$$\lambda = -mb\left(\frac{M}{2m + M}\right)^2\dot{\varphi}^2 + kb$$

Por último, de (10, 4) se obtiene

$$\mu = ma\ddot{\varphi} + ka\varphi.$$

Ejercicio nº 50.-



1.- Como existen fuerzas no conservativas (el amortiguamiento viscoso), la función Lagrangiana a calcular es una "Lagrangiana parcial".

Las expresiones de la energía cinética y de la energía potencial son:

$$T = \frac{1}{2}\, M \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, m(\dot{x}^2 + 2l\, \dot{x}\, \dot{\theta}\, \cos\theta + \dot{\theta}^2\, l^2)$$

$$V = -m\, g\, l \cos\theta$$

con lo que la función Lagrangiana resulta

$$L = T - V = \frac{1}{2}\, M\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\, (\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2\, l^2 + 2l\, \dot{x}\, \dot{\theta}\, \cos\theta) + m\, g\, l \cos\theta$$

Las Ecuaciones de Lagrange se obtienen con:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta \qquad (2)$$

Las fuerzas generalizadas se obtienen aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\delta W = -c\dot{x}\delta x \quad \Rightarrow \qquad Q_x = -c\dot{x}, \quad Q_\theta = 0$$

Sustituyendo en (1),(2) y operando, las ecuaciones del movimiento resultan:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} + ml\, \ddot{\theta}\, \cos\theta - ml\, \dot{\theta}^2\, \operatorname{sen}\theta &= -c\, \dot{x} \\ ml^2\, \ddot{\theta} + ml\, \ddot{x}\, \cos\theta + m\, g\, l\, \operatorname{sen}\theta &= 0 \end{aligned}$$

No existen integrales primeras:

– La energía total no es constante ya que existen fuerzas no conservativas.

– No tiene sentido hablar de la integral de Jacobi pues la evolución del sistema no viene caracterizada por una función lagrangiana (L es una función "Lagrangiana Parcial").

– No existen coordenadas cíclicas ya que a pesar de ser $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, al existir $Q_x \neq 0$ se cumple que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = Q_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \neq \text{Cte}$$

2.- En este caso ($c = 0$) todas las fuerzas son conservativas, existiendo dos integrales primeras:

– Conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}M\ \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2\ l^2 + 2l\ \dot{x}\ \dot{\theta}\ \cos\theta) - m\ g\ l\ \cos\theta = C_1 \qquad (3)$$

– La correspondiente a la coordenada cíclica x

$$(M+m)\dot{x} + ml\ \dot{\theta}\ \cos\theta = C_2 \qquad (4)$$

1. En el instante inicial $\dot{x}_0 = \dot{\theta}_0 = 0, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$; con lo cual $C_1 = C_2 = 0$

   Operando en (4):

   $$(M+m)\dot{x} + ml\ \dot{\theta}\ \cos\theta = 0 \Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{ml\ \cos\theta}{M+m}\dot{\theta}$$

   e integrando esta expresión entre $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ y $\theta = 0$, se obtiene el desplazamiento del carretón:

   $$\int_0^x dx = \int_{\pi/2}^0 -\frac{ml\ \cos\theta}{M+m}d\theta = \frac{ml}{M+m}$$

2. Particularizando para $\theta = 0$ la ecuación (4):

   $$\dot{\theta} = -\frac{M+m}{ml}\dot{x}$$

   Sustituyendo en (3) y despejando $\dot{x}$, se obtiene la velocidad del carretón:

   $$\dot{x}^2 = \frac{2m^2gl}{mM+M^2}$$