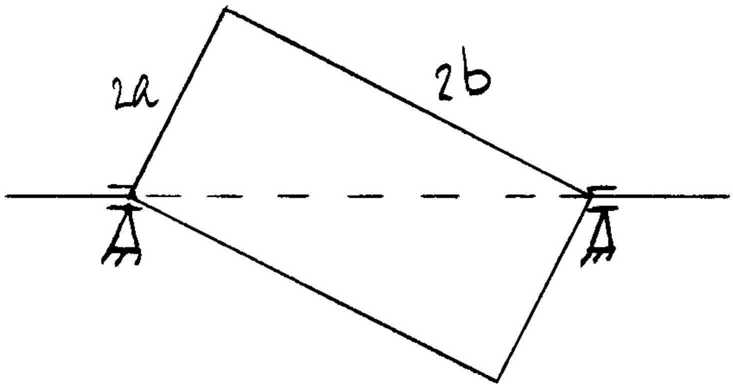
MECÁNICA

Práctica n$^{\underline{o}}$ 12

curso 95-96

56. Una placa rectangular de masa m y lados $2a$ y $2b$ puede girar alrededor de una diagonal. El eje de giro se materializa mediante dos cojinetes lisos situados en los vértices de esta diagonal. Inicialmente la velocidad de rotación es ω_0, quedando la placa en rotación libre. Se pide:

1. Evolución de la velocidad de rotación de la placa con el tiempo.
2. Reacciones que soportan los cojinetes.
3. Demostrar que las reacciones en los cojinetes se anulan si y sólo si el eje de rotación es principal y pasa por el C.D.M.



57. Un cono de masa M, radio R en la base y semiángulo cónico 30° se mueve sobre un plano horizontal liso apoyado por una generatriz, de forma que rueda sin delizar y la generatriz de contacto gira alrededor del vértice fijo O del cono con velocidad ω. Se pide:

1. Considerando unos ejes móviles $Oxyz$, con Oz dirigido según el eje del cono y Oy horizontal, expresar el momento cinético respecto del vértice O.
2. Obtener el valor de ω para el cual el vértice del cono se levantaría del plano.

58. Una bola de billar se pone en movimiento al ser golpeada por el taco de forma que adquiere una velocidad inicial de su centro $\boldsymbol{v}_0$ (tangente a la mesa) y una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}_0$. En el contacto con la mesa se desarrolla un rozamiento con coeficiente μ. Se pide:

1. Determinar el movimiento, demostrando que éste tiene dos etapas diferenciadas: la fase en que la bola desliza, y la fase posterior en que rueda sin deslizar.
2. Discutir si mediante la observación del movimiento sería posible determinar si la bola está hueca o si es maciza.

59. Un sólido está formado por un disco homogéneo pesado de masa m y radio a unido rígidamente a una varilla de masa despreciable de longitud $2a\sqrt{2}$ perpendicularmente por el centro de ambos. Un extremo (A) de la varilla está obligado a moverse según una recta vertical lisa, y el otro extremo (B) se mueve sobre otra recta horizontal lisa que dista $2a$ de la primera.

1. Tomando como grados de libertad el ángulo θ que forma la varilla con la recta vertical y el ángulo φ girado por el disco alrededor de su eje, obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Tomando como condiciones iniciales $(v_B = v_0, \dot{\varphi} = \omega_0, \theta_0 = 45°)$ obtener las integrales primeras del movimiento.
3. Suponiendo ahora que B tiene un movimiento impuesto con la ley $x_B = 2a \operatorname{sen} \omega t$, calcular en un instante genérico la velocidad de A y la aceleración del centro del disco.
4. Calcular la fuerza que se necesita aplicar en B para producir este último movimiento.

60. Una varilla recta AB, pesada y homogénea, de masa m y longitud $2l$, se mueve bajo la acción de la gravedad deslizando sin rozamiento sobre un plano P que a su vez gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje fijo. Este eje fijo forma un ángulo α con la vertical.

Se utilizarán los triedros triortogonales y a derechas siguientes:

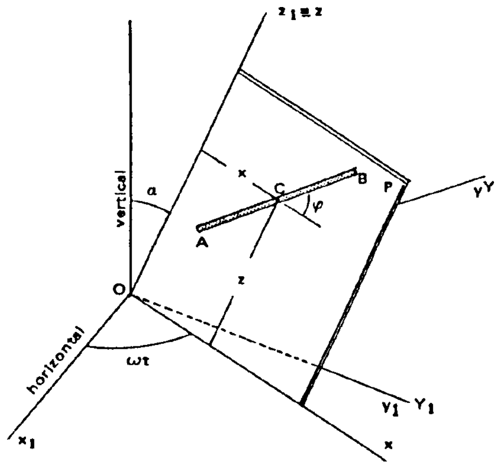
a.- El $OX_1Y_1Z_1$, fijo, constituido por el eje de giro OZ_1 y la horizontal OX_1.

b.- El $OXYZ$, ligado al plano, tal que OZ coincide con el eje de giro y el OX situado en dicho plano P.

La posición de la varilla quedará determinada por las coordenadas x, z de su centro de masas respecto al sistema $OXYZ$ y por el ángulo φ que la varilla forma con el eje OX. Se pide:

1. Calcular en función de x, z, φ y sus derivadas la energía cinética de la varilla respecto al eje fijo $OX_1Y_1Z_1$.

2. Calcular en función de x, z, φ y sus derivadas las componentes según los ejes del triedro $OXYZ$ del momento cinético de la varilla respecto a su centro de masas, correspondiente a su movimiento respecto al triedro de referencia $OX_1Y_1Z_1$
3. Plantear e integrar las ecuaciones del movimiento de la varilla con respecto al triedro de referencia $OXYZ$.
4. Determinar la resultante y el momento resultante con respecto al centro de masas de la varilla de las fuerzas que el plano ejerce sobre ésta.

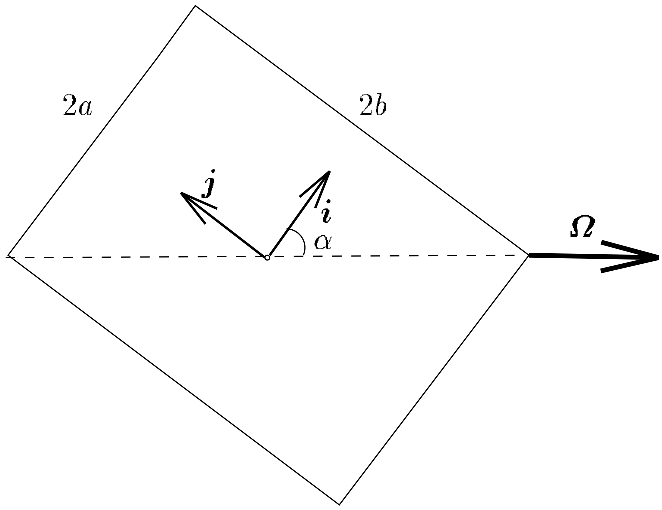


MECÁNICA

Práctica nº 12 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 56.-



1.- Tomamos los ejes de la figura, de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ sea paralelo al lado $2a$ y $\boldsymbol{j}$ al $2b$. Los momentos principales de inercia son

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3}mb^2; \\ B &= \frac{1}{3}ma^2; \\ C &= \frac{1}{3}m(a^2+b^2) \end{aligned}$$

Llamando α al ángulo constante que forma $\boldsymbol{i}$ con el eje de giro (diagonal), la velocidad angular en los ejes del cuerpo vale

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\cos\alpha\,\boldsymbol{i} - \omega\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\boldsymbol{j} \tag{1}$$

Se trata de un sólido con un eje fijo; el momento de las fuerzas proyectado sobre este eje es nulo, por lo que la velocidad de rotación alrededor del eje es constante:

$$\omega = \omega_0$$

2.- Aplicaremos ahora las ecuaciones de Euler con las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ en el triedro del cuerpo dadas por (1), $(p,q,r) = (\omega\cos\alpha, -\omega\,\mathrm{sen}\,\alpha, 0)$:

$$\left\{\begin{array}{l} M_x = A\dot{p} - (B-C)qr \\ M_y = B\dot{q} - (C-A)rp \\ M_z = C\dot{r} - (A-B)pq \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} M_x = A\dot{p} = 0 \\ M_y = B\dot{q} = 0 \\ M_z = -\frac{1}{3}m(a^2-b^2)\omega_0^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha \end{array}\right.$$

Las dos primeras ecuaciones expresan que el momento de las reacciones es perpendicular a la placa. La tercera, considerando que $\tan\alpha = b/a$, resulta

$$M_z = \frac{1}{3}m\omega_0^2 ab\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \tag{2}$$

Las reacciones en los cojinetes originan el momento (2) en el centro de la placa, por lo que estarán contenidas en el plano de la misma, siendo normales al eje de giro (diagonal), con sentidos opuestos y de valor

$$R = \pm \frac{M_z}{2\sqrt{a^2+b^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \pm \frac{1}{6} M \omega^2 ab \frac{b^2-a^2}{(b^2+a^2)^{3/2}}}$$

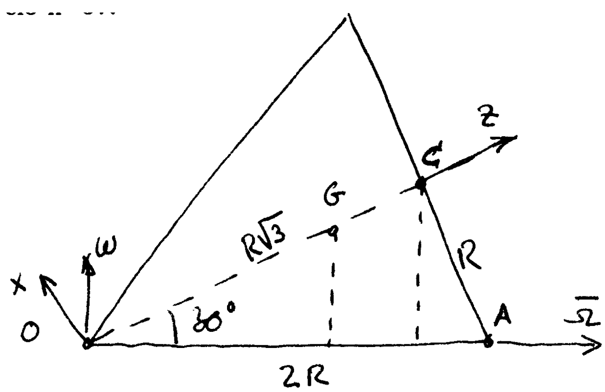
Al girar la placa las reacciones giran con ella, produciendo un desgaste en el contacto del eje con los cojinetes.

3.- Si no se producen reacciones en los cojinetes, el momento aplicado será nulo. Puesto que se conserva la velocidad angular en el triedro del cuerpo (1), la ecuación vectorial de Euler establece

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0};$$

esta expresión se cumple si $\boldsymbol{\Omega}$ e $(\boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})$ son paralelas, es decir $\boldsymbol{\Omega}$ debe ser una dirección principal de inercia.

Ejercicio nº 57.-



1.- Tomaremos el triedro $Oxyz$, con Oz según el eje del cono y Oy horizontal, positivo hacia fuera del papel en la figura. El vértice O del cono es fijo y el centro C de la base describe una circunferencia con velocidad

$$v_C = -\omega R\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\omega R\frac{3}{2};$$

(perpendicular al plano de la figura, con sentido hacia dentro del papel). Podemos interpretar esta velocidad como proveniente de la rodadura alrededor de la generatriz de contacto OA, calculando así la velocidad de rotación Ω:

$$\Omega R\frac{\sqrt{3}}{2} = -\omega R\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \Omega = -\omega\sqrt{3}$$

Las componentes se obtienen proyectando:

$$\Omega_x = -\omega\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \omega\sqrt{3}/2; \quad \Omega_z = -\omega\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\omega\frac{3}{2}$$

Los momentos principales de inercia en el vértice son:

$$A = B = \frac{3}{5}M\left(h^2 + \frac{R^2}{4}\right) = \frac{39}{20}MR^2; \quad C = \frac{3}{10}MR^2$$

Con lo que resulta la expresión del momento cinético pedida:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_O &= A\Omega_x\boldsymbol{i} + C\Omega_z\boldsymbol{k}\\ &= \frac{MR^2\omega}{20}\left(39\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - 6\frac{3}{2}\boldsymbol{k}\right)\end{aligned}$$

2.- El momento cinético se mantiene constantemente en el plano vertical de la figura con componentes constantes según los ejes móviles Ox y Oz; por tanto,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O &= \frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{H}_O = \frac{MR^2\omega^2}{20}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right)\left(\frac{39\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{k}\right)\\ &= MR^2\omega^2\frac{57\sqrt{3}}{80}\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

Este momento está producido por el peso del cono (aplicado en G) y la reacción vertical del plano, de valor $N = Mg$ y aplicada en algún punto de la generatriz de contacto OA, que necesariamente estará situado más a la derecha que la vertical por G.

En el límite de vuelco la reacción está en el punto A. Expresando el momento,

$$MR^2\omega^2\frac{57\sqrt{3}}{80} = Mg\left(2R - \frac{3}{4}R\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = MgR\frac{7}{8},$$

y despejando:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{70}{57\sqrt{3}}\frac{g}{R}}$$

Observación.- También se podría haber resuelto el problema aplicando directamente las ecuaciones de Euler en el triedro intermedio. La ecuación correspondiente a la dirección y sería

$$M_y = -(C-A)\Omega_z\Omega_x - A\Omega_x\dot{\varphi};$$

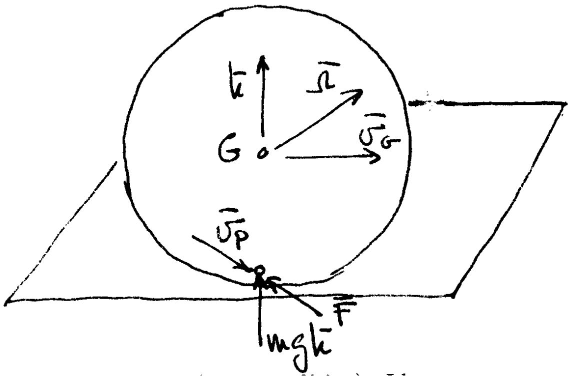
$\dot{\varphi}\boldsymbol{k}$ es la velocidad de rotación total ($\boldsymbol{\Omega}$) menos la del triedro intermedio ($\boldsymbol{\omega}$), resultando $\dot{\varphi}\boldsymbol{k} = -2\omega\boldsymbol{k}$. Operando sale el mismo valor para el momento que antes,

$$M_y = MR^2\omega^2\frac{57\sqrt{3}}{80}$$

Ejercicio nº 58.-

1.- Denominamos en un instante genérico $\boldsymbol{v}_G$ a la velocidad de G y $\boldsymbol{\Omega}$ a la velocidad angular de la esfera. En el instante inicial se cumple

$$\boldsymbol{v}_G|_0 = \boldsymbol{v}_0; \ \ \boldsymbol{\Omega}|_0 = \boldsymbol{\omega}_0$$



La reacción en general vale $\boldsymbol{F} + R\boldsymbol{k}$, siendo $R = mg$ la componente vertical, y $\boldsymbol{F}$ la fricción horizontal.

En la esfera todos los ejes son principales de inercia (tensor esférico). Llamando k al radio de giro, el momento cinético es

$$\boldsymbol{H}_G = mk^2\boldsymbol{\Omega}$$

Expresamos las ecuaciones de la dinámica,

$$\begin{aligned} mk^2\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= (-a\boldsymbol{k}) \wedge (\boldsymbol{F} + mg\,\boldsymbol{k}) = -a\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{F}, & (1)\\ m\dot{\boldsymbol{v}}_G &= \boldsymbol{F}. & (2)\end{aligned}$$

Estas constituyen 5 ecuaciones, ya que no se plantea movimiento z_G. Las incógnitas son 7: $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, x_G, y_G), (F_x, F_y)$. Las dos ecuaciones que faltan provienen de la ley de fricción:

$$\boldsymbol{F} = -\mu mg\frac{\boldsymbol{v}_P}{v_P}, \qquad (3)$$

siendo $\boldsymbol{v}_P$ la velocidad de deslizamiento, donde P es el punto de la esfera en contacto con el plano,

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge (-a\boldsymbol{k}).$$

Derivando:

$$\dot{\boldsymbol{v}}_P = \dot{\boldsymbol{v}}_G - a\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \boldsymbol{k}$$

Debe observarse que esta expresión no representa la aceleración del punto de la esfera, sino la derivada temporal de la velocidad de deslizamiento $\boldsymbol{v}_P$.

Empleando en esta ecuación las expresiones (1), (2):

$$\dot{\boldsymbol{v}}_P = \frac{\boldsymbol{F}}{m} + \frac{a^2}{mk^2}\underbrace{(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{F})\wedge\boldsymbol{k}}_{=\boldsymbol{F}},$$

es decir,

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_P = \boldsymbol{F}\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right).$$

Considerando esta ecuación junto con la (3) se concluye que $\dot{\boldsymbol{v}}_P$ y $\boldsymbol{v}_P$ son colineales, por lo que $\boldsymbol{v}_P$ no varía en dirección. Sea esta dirección fija $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{v}_P/v_P$ (vector unitario);

$$\boldsymbol{v}_P = v_P\,\boldsymbol{i}; \quad \boldsymbol{F} = -\mu mg\,\boldsymbol{i} \tag{4}$$

$$\dot{v}_P = -\mu g\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_P = v_P|_0 - \mu gt\left(1+\frac{a^2}{k^2}\right)$$

La velocidad de deslizamiento inicial es $v_P|_0 = |\boldsymbol{v}_0 - a\boldsymbol{\Omega}_0\wedge\boldsymbol{k}|$. La esfera desliza hasta que sea $v_P = 0$, es decir, hasta el instante dado por

$$t = \frac{v_P|_0}{\mu g}\frac{k^2}{a^2+k^2}. \tag{5}$$

A partir de este instante, la esfera deja de deslizar. En esta segunda fase las ecuaciones (1) y (2) tienen la solución ($\boldsymbol{v}_G = \mathbf{cte}, \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{cte}$), siendo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.

Durante el deslizamiento, empleando (2) y (4):

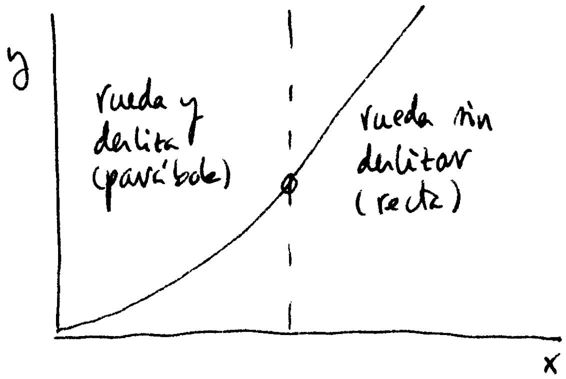
$$\dot{\boldsymbol{v}}_G = -\mu g\,\boldsymbol{i};$$

es decir, se obtiene una trayectoria parabólica:

$$\begin{cases} x_G = \dot{x}_G|_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 \\ y_G = \dot{y}_G|_0 t \end{cases}$$

A partir del momento en que comienza la rodadura sin deslizamiento la trayectoria es recta, conservándose la velocidad $\boldsymbol{v}_G$ que tuviera en ese momento.

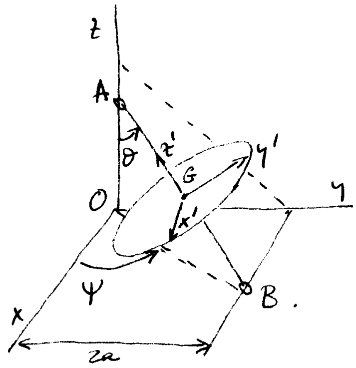
2.- Si la bola es una esfera maciza, el radio de giro vale $k^2 = (2/5)a^2$; si es una esfera hueca, $k^2 = (2/3)a^2$. En casos intermedios, k tendrá un valor intermedio entre estos dos. Midiendo el tiempo que dura el deslizamiento (5) se obtendría el valor de k que corresponde, y por tanto se podría caracterizar el tipo de bola.



Ejercicio nº 59.-

Consideraremos el triedro $(Oxyz)$ fijo y el $(Gx'y'z')$ móvil, con Gz' según la varilla y Gx' según un radio horizontal del disco. Este corresponde al denominado "triedro intermedio" ya que no acompaña al sólido en su rotación propia.
Los ángulos que definen la configuración del sólido son: ψ de la proyección (OB) del eje con Ox; θ, de AB con Oz; φ, rotación propia alrededor de la varilla. Entre ψ y θ existe la relación geométrica

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta} \qquad (1)$$



1.- Plantearemos el problema mediante las ecuaciones de Lagrange, para lo que se debe obtener en primer lugar la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega}. \qquad (2)$$

La velocidad de G se puede obtener expresando las coordenadas y derivando:

$$\begin{array}{lcl} x_G = \frac{a}{\tan\psi} = a\sqrt{-\cos 2\theta} & \Rightarrow & \dot{x}_G = a\dot{\theta}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}} \\ y_G = a & \Rightarrow & \dot{y}_G = 0 \\ z_G = a\sqrt{2}\cos\theta & \Rightarrow & \dot{z}_G = -a\sqrt{2}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta \end{array} \qquad (3)$$

(debe tenerse en cuenta que al ser $\theta \geq 45°$ resulta $(-\cos 2\theta) > 0$).

Por otra parte, las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$ en el triedro $(Gx'y'z')$ son

$$p' = \dot{\theta}; \quad q' = \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta; \quad r' = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

Empleando la relación (1) eliminamos $\dot{\psi}$:

$$p' = \dot{\theta}; \quad q' = -\dot{\theta} \frac{\cos \theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}; \quad r' = -\dot{\theta} \frac{\cos 2\theta / \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}} + \dot{\varphi} \tag{4}$$

Los momentos de inercia según los ejes principales $(Gx'y'z')$ son

$$A = B = \frac{1}{4} m a^2; \quad C = \frac{1}{2} m a^2.$$

Empleando (3) y (4) la expresión de la energía cinética resulta

$$T = \frac{9}{16} m a^2 \dot{\theta}^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(-\cos 2\theta)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m a^2 \right) \left(-\dot{\theta} \frac{\cos 2\theta / \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}} + \dot{\varphi} \right)^2 \tag{5}$$

Por último, el potencial tiene la expresión

$$V = m g a \sqrt{2} \cos \theta$$

Comprobamos que la Lagrangiana $L = T - V$ no depende de φ, por lo que esta coordenada es cíclica:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} m a^2 r' = \text{cte} \tag{6}$$

Por consiguiente se puede omitir de la expresión de la Lagrangiana el último sumando de (5), correspondiente a $(1/2)C(r')^2$, que es constante:

$$L = \frac{9}{16} m a^2 \dot{\theta}^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(-\cos 2\theta)} - m g a \sqrt{2} \cos \theta$$

Derivando se obtiene la ecuación de Lagrange del sistema para θ:

$$\boxed{\frac{9}{8} m a^2 \ddot{\theta} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{(-\cos 2\theta)} - \frac{9}{8} m a^2 \dot{\theta}^2 \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos^2 2\theta} - m g a \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta = 0} \tag{7}$$

2.- Como se ha dicho antes (6) la coordenada φ es cíclica. Empleando la expresión $(4)_3$ de r' y las condiciones iniciales dadas que implican ($\dot{\theta}_0 = 0$, $\theta_0 = \pi/4$, $\dot{\psi}_0 = v_0/2a$),

$$\boxed{r' = \dot{\varphi} - \dot{\theta} \frac{\cos^2 \theta / \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}} = \frac{v_0}{2\sqrt{2} a} + \omega_0}$$

La otra integral primera que se puede obtener es la constancia de la energía, al tratarse de fuerzas conservativas. Desarrollando la expresión de ésta (2) y considerando las condiciones iniciales ($\dot{x}_G|_0 = v_0/2$; $\dot{y}_G|_0 = 0$; $\dot{z}_G|_0 = 0$) resulta

$$\boxed{E - \frac{1}{2}C(r')^2 = \frac{9}{16}ma^2\dot{\theta}^2\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(-\cos 2\theta)} + mga\sqrt{2}\cos\theta = \frac{9}{64}mv_0^2 + mga}$$

Se puede comprobar que derivando esta expresión de llega a la misma ecuación (7) obtenida antes.

3.- Procedemos obteniendo en primer lugar la coordenada z_A:

$$x_B^2 + 4a^2 + z_A^2 = 8a^2 \quad \Rightarrow \quad z_A^2 = 4a^2 - (2a\operatorname{sen}\omega t)^2 = 4a^2\cos^2\omega t$$

por lo que

$$\boldsymbol{v}_A = -2a\omega\operatorname{sen}\omega t\ \boldsymbol{k}.$$

Para el centro de masas

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{2}z_A = a\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}_G = -a\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y}_G &= 0 \\ x_G &= a\operatorname{sen}\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_G = -a\omega^2\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

por lo que

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_G = -a\omega^2[\operatorname{sen}(\omega t)\boldsymbol{i} + \cos(\omega t)\boldsymbol{k}]$$

4.- La obtención directa mediante procedimientos de "Newton-Euler" de la fuerza no es inmediata, debido a que en las ecuaciones dinámicas hay que incluir también las reacciones incógnitas. En concreto, en la dirección de la fuerza aplicada para mover B habrá una reacción $(R_A)_x$ en el otro extremo. Resolveremos esta cuestión mediante la ecuación de Lagrange ya calculada (7), introduciendo en ella una fuerza generalizada Q_θ. La relación de la fuerza aplicada F con la fuerza generalizada Q_θ se obtiene mediante la expresión del trabajo virtual:

$$\delta W = F\ \delta x_B = F\frac{2a\operatorname{sen}2\theta\delta\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}} \quad \Rightarrow \quad Q_\theta = \frac{2a\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}F$$

Introduciendo Q_θ en el lado derecho de la ecuación (7),

$$\frac{9}{8}ma^2\ddot{\theta}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{(-\cos 2\theta)} - \frac{9}{8}ma^2\dot{\theta}^2\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2 2\theta} - mga\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{2a\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{-\cos 2\theta}}F \qquad (8)$$

El movimiento dado ($x_B = 2a \operatorname{sen} \omega t$) permite obtener las relaciones geométricas siguientes:

$$\cos\theta = \frac{\cos\omega t}{\sqrt{2}};$$

$$-\cos 2\theta = \operatorname{sen}^2\omega t; \quad \operatorname{sen} 2\theta = \cos\omega t\sqrt{1+\operatorname{sen}^2\omega t}$$

y derivando éstas,

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2\frac{\operatorname{sen}^2\omega t}{1+\operatorname{sen}^2\omega t}; \quad \ddot{\theta} = \omega^2\frac{\cos\omega t}{(1+\operatorname{sen}^2\omega t)^{3/2}}.$$

Sustituyendo estos valores en (8) se obtiene finalmente

$$\boxed{F = -\frac{mg}{2}\tan\omega t}$$

Ejercicio nº 60.-

1.-

$$T = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega\boldsymbol{k}_1 - \dot{\varphi}\boldsymbol{j} = \omega\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i}_2 + \omega\cos\varphi\boldsymbol{j}_2 + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}_2 \tag{2}$$

siendo $\{\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{j}_2\boldsymbol{k}_2\}$ unos vectores unitarios correspondientes a un triedro que acompaña a la varilla de forma que $\boldsymbol{i}_2$ corresponde a la dirección de la varilla.

$$V_G^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 x^2 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{I}_G = \frac{ml^2}{3}\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 x^2) + \frac{ml^3}{6}(\omega^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2) \tag{5}$$

2.-

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{ml^2}{3}(\omega\cos\varphi\boldsymbol{j}_2 + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}_2) \tag{6}$$

sabiendo

$$\boldsymbol{k}_2 = -\boldsymbol{j} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{j}_2 = \cos\varphi\boldsymbol{k} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H}_G = -\frac{ml^2}{3}\omega\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} - \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}\boldsymbol{j} + \frac{ml^2}{3}\omega\cos^2\varphi\boldsymbol{k} \tag{9}$$

3.-

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = m\boldsymbol{a}_G \tag{10}$$

las ecuaciones del movimiento respecto al sistema de referencia $\{OXYZ\}$, teniendo en cuenta las fuerzas de inercia centrífuga y de coriolis resultan:

$$mg\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega t = m(\ddot{x} - \omega^2 x) \tag{11}$$

$$N - mg\operatorname{sen}\alpha\cos\omega t = -2m\omega\dot{x} \tag{12}$$

$$-mg\cos\alpha = m\ddot{z} \tag{13}$$

La ecuación (12) corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes constantes:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = g \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega t \tag{14}$$

$$x = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t} + A \operatorname{sen}\omega t \tag{15}$$

donde el coeficiente A se obtiene sustituyendo la solución particular en la ecuación diferencial, y las constantes C_1 y C_2 se determinarían a partir de las condiciones iniciales, resultando

$$x = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t} - \frac{g \operatorname{sen}\alpha}{2\omega^2} \operatorname{sen}\omega t \tag{16}$$

De forma análoga la ecuación (13) es directamente integrable:

$$z = -\frac{1}{2} m g \cos\alpha t^2 + C_3 + C_4 t \tag{17}$$

Para la obtención de la ecuación de evolución del grado de libertad φ se plantea la ecuación del momento cinético:

$$\sum \boldsymbol{M}_G = \dot{\boldsymbol{H}}_G \tag{18}$$

dado que $\boldsymbol{H}_G$ se encuentra referido a un sistema de referencia móvil, la derivada resulta:

$$\dot{\boldsymbol{H}}_G = \left.\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt}\right|_{\text{rel}} + \omega \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_G \tag{19}$$

Por tanto:

$$\dot{\boldsymbol{H}}_G = \frac{ml^2}{3}\omega\dot{\varphi}(1-\cos 2\varphi)\boldsymbol{i} + \frac{ml^2}{3}(-\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{sen} 2\varphi)\boldsymbol{j} - \frac{ml^2}{3}\omega\dot{\varphi} \operatorname{sen} 2\varphi \boldsymbol{k} \tag{20}$$

Sea $\boldsymbol{M}$ el momento respecto a G que ejerce el plano sobre la varilla, siendo el momento ortogonal a la varilla. De este modo:

$$\boldsymbol{M} = -M \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{i} + M \cos\varphi \boldsymbol{k} \tag{21}$$

Sabiendo que no existe componente en la dirección $\boldsymbol{j}$ del momento: la ecuación diferencial en φ resulta:

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{sen} 2\varphi = 0 \tag{22}$$

4.- La reacción que ejerce el plano sobre la varilla se puede obtener de la ecuación (13) del apartado anterior:

$$N = mg \operatorname{sen} \alpha \cos \omega t - 2m\omega \dot{x} \tag{23}$$

sustituyendo $\dot{x}$:

$$N = mg \operatorname{sen} \alpha \cos \omega t - 2m\omega \left\{ \omega[-C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{\omega t}] - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2\omega} \cos \omega t \right\} \tag{24}$$

De forma análoga de la ecuación (20) del momento cinético expresado en la dirección $\boldsymbol{i}$ se obtiene el momento de la reacción:

$$-M \operatorname{sen} \varphi = \frac{ml^2}{3} \omega \dot{\varphi} (1 - \cos 2\varphi) \tag{25}$$

resultando:

$$M = -\frac{2ml^2}{3} \omega \dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \tag{26}$$