MECÁNICA

Práctica nº 13 curso 95-96

61. Una superficie semiesférica S, homogénea, se abandona en reposo en contacto por su parte curva con una pared vertical lisa, teniendo su borde paralelo a dicha pared y apoyándose sobre un plano horizontal liso. Demostrar que S se mantiene en contacto con la pared hasta que el borde esté horizontal y encontrar la máxima inclinación que el mismo formará con la horizontal posteriormente.

62. En el movimiento general de un sólido, hallar el lugar geométrico de los puntos P tales que la energía cinética del sólido pueda expresarse como suma de la energía de P, supuesto dotado de la masa total, más la energía del sólido en su movimiento alrededor de P.

63. Un sólido homogéneo está constituido por un cono recto de radio en la base r y altura h, en cuya base se ha soldado una semiesfera de radio r, teniendo el centro de masas en el centro de la base del cono. Se coloca el sólido, con su eje vertical, sobre un plano horizontal rugoso, con una rotación inicial ω alrededor de un eje horizontal que pasa por el centro de masa. Calcular el valor mínimo de ω para que el sólido vuelque sin dejar de deslizar. El coeficiente de rozamiento al deslizamiento es k y no existe resistencia a la rodadura.

64. Un cilíndro homogéneo de 200 kg de masa tiene una sección recta elíptica de semiejes 0.5 m y 0.4 m. Su altura h es tal que el tensor central de inercia tiene dos momentos principales iguales, siendo el tercero mayor.

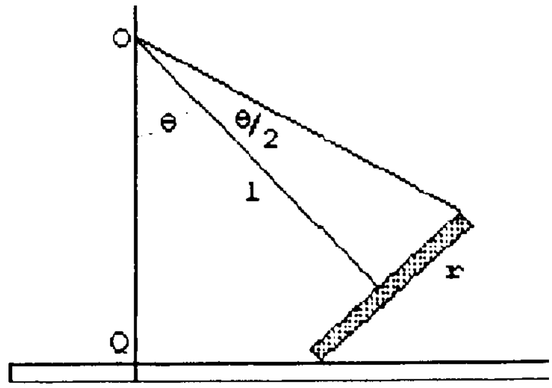
El cilindro tiene fijo su centro de masa e inicialmente está girando en torno a un eje instantáneo que pasa por el extremo del semieje menor de una base, con velocidad instantánea de 200 rad/s. Se pide:

1. Valor de h.
2. Estudiar el movimiento.

65. Un disco homogéneo de espesor despreciable, radio r y masa m, está unido rígidamente a una varilla de sección y masa despreciables ortogonal a la placa pasando por su centro.

La varilla tiene su extremo fijo en un punto O con articulación esférica que permite cualquier rotación de la varilla en torno a un eje instantáneo que pase por O.

El disco se apoya por su borde en un plano fijo con la condición de no deslizar. Se dá el ángulo θ que forman el eje de la varilla y la vertical OQ de O. El movimiento se raliza de forma que el plano vertical que contiene a la varilla gira con velocidad constante ω en torno a la vertical de O. El radio r del disco y la longitud l de la varilla cumplen la condición $r/l = \tan(\theta/2)$. Se pide: Hallar el valor límite de la velocidad de rotación ω para la cual el disco comenzaría a separarse del plano.

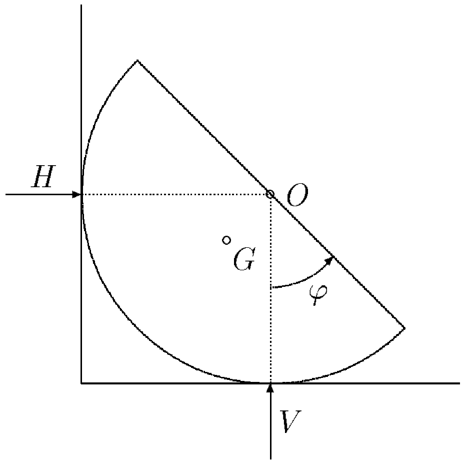


MECÁNICA

Práctica nº 13 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 61.-



Sea O el centro de la esfera y G el C.D.M. de la semiesfera (ver figura). Dada la simetría existente respecto del plano vertical que contiene a OG, el movimiento se verificará según ese plano. Haremos la hipótesis de que S se mantiene en contacto con la pared (es decir, gira alrededor de O) y calcularemos el valor dela reacción horizontal H necesario para este movimiento. Si este valor resulta positivo para $\varphi \leq 90°$ la hipótesis será correcta.

$$H = m(|\boldsymbol{OG}|\dot{\varphi}^2 \cos\varphi + |\boldsymbol{OG}|\ddot{\varphi} \operatorname{sen}\varphi)$$

Vemos que todos los términos, a falta de comprobar $\ddot{\varphi}$, son positivos en el cuadrante considerado. Comprobemos $\ddot{\varphi}$ mediante la ecuación de momentos en O:

$$mg\,|\boldsymbol{OG}|\cos\varphi = I_O\ddot{\varphi};$$

luego también $\ddot{\varphi}$ será positiva en el intervalo considerado, por lo que efectivamente comprobamos que H será positiva y S se mantendrá en contacto con la pared hasta que $\varphi = 90°$, momento en el que vemos que $H = 0$. A partir de ese momento, G mantendrá constante la componente horizontal de su velocidad, puesto que sobre S ya no actúa ninguna fuerza horizontal. La máxima inclinación $\theta = \varphi - 90°$ del borde de S vendrá dada por la posición en que se anula su velocidad de rotación. Establecemos la conservación de la energía entre el instante en que se separa de la pared y el de máxima inclinación:

$$\frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_G^2 + mg\,|\boldsymbol{OG}|(1-\cos\theta)$$

a su vez, por conservación de energía entre el instante inicial y el de $\varphi = 90°$,

$$\frac{1}{2}I_O\omega_0^2 = mg\,|\boldsymbol{OG}|$$

luego

$$I_G\frac{mg\,|\boldsymbol{OG}|}{I_O} = mg\,|\boldsymbol{OG}|(1-\cos\theta)$$

y por tanto:

$$\cos\theta = \frac{I_O - I_G}{I_O} = \frac{m\,|\boldsymbol{OG}|^2}{(2/3)mr^2} = \frac{(1/4)r^2}{(2/3)r^2} = \frac{3}{8}$$

(NOTA: no debe cometerse el error de anular rutinariamente la totalidad de la energía cinética en la posición de máxima inclinación, ya que sólo es nula la de rotación, conservando siempre G una velocidad horizontal constante, como se vió).

Ejercicio nº 62.-

Sea B un punto cualquera del sólido $\mathcal{S}$. Sabemos que:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{PB}$$

y como

$$2T = \int_{\mathcal{S}} {\boldsymbol{v}_B}^2\rho dV$$

sustituyendo $\boldsymbol{v}_B$ obtenemos

$$2T = \int_{\mathcal{S}}[{\boldsymbol{v}_P}^2 + (\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{PB})^2 + 2\boldsymbol{v}_P\cdot(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{PB})]\rho dV$$

y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_P$ es constante en el dominio de integración

$$2T = M{\boldsymbol{v}_P}^2 + \int_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{PB})^2\rho dV + 2\boldsymbol{v}_P\cdot\int_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{PB})\rho dV$$

la condición impuesta por el enunciado nos dice:

$$2T = M{\boldsymbol{v}_P}^2 + \int_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{PB})^2\rho dV$$

e igualando las dos expresiones, deducimos

$$2\boldsymbol{v}_P \cdot \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{PB}) \rho dV = 0;$$

desarrollando esta expresión

$$2\boldsymbol{v}_P \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{PB} \rho dV \right) = 2\boldsymbol{v}_P \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge M\, \boldsymbol{PG})$$

y como

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}$$

resulta

$$(\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{GP}) = 0 \qquad (1)$$

que es la ecuación vectorial del lugar pedido. Tomando unos ejes con origen en G, de modo que el eje z coincida con $\boldsymbol{\omega}$ y que el plano yz sea el definido por $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{v}_G$, tendremos:

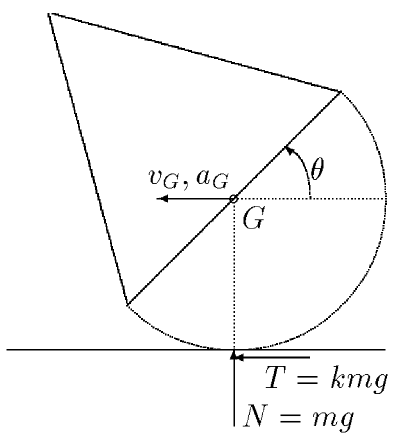
$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}; \qquad \boldsymbol{v}_G = v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}; \qquad \boldsymbol{GP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

donde $v_y = |\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{\omega}|/\omega$ y $v_z = \boldsymbol{v}_G \cdot \boldsymbol{\omega}/\omega$. Sustituyendo en (1) se obtiene

$$(x^2 + y^2)\omega^2 + \omega x v_y = 0,$$

que es la ecuación de un cilindro, de eje paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ y diámetro $v_y/\omega = |\boldsymbol{v}_G \wedge \boldsymbol{\omega}|/\omega^2$, una de cuyas generatrices pasa por G.

Ejercicio nº 63.-



Dada la simetría existente respecto del plano vertical que pasa por el eje del sólido, el movimiento se verificará según este plano.

Como G se desplaza horizontalmente la reacción vertical vale $N = mg$, siendo m la masa total del sólido conjunto. Como el sólido no deja de deslizar, la reacción horizontal vale $T = kN = kmg$, luego:

$$kmg = ma_G \quad \Rightarrow \quad a_G = kg \quad \Rightarrow \quad v_G = kgt$$

Tomando momentos en G:

$$kmgr = -I_G\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega - \frac{kmgr}{I_G}t$$

Para que no deje de deslizar:

$$v_G \leq \dot{\theta}r \quad \Rightarrow \quad kgt \leq \omega r - \frac{kmgr^2}{I_G}t \tag{1}$$

Esta relación debe mantenerse, por lo menos hasta el instante t en que el eje se coloca horizontal:

$$\theta = \omega t - \frac{kmg}{2I_G}rt^2 = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Sustituyendo la solución de esta ecuación cuadrática (2) en (1) y operando resulta

$$\omega^2 \geq \frac{kmgr\pi/I_G}{1 - \dfrac{I_G}{I_G + mr^2}} \tag{3}$$

El momento de inercia I_G en función de las masas del cono (m_C) y de la semiesfera (m_S) vale

$$I_G = m_\mathrm{C}\left[\frac{3}{20}\left(r^2\frac{h^2}{4}\right) + \frac{h^2}{16}\right] + m_\mathrm{S}\frac{2}{5}r^2;$$

para que G esté donde dice el enunciado:

$$m_\mathrm{C}\frac{1}{4}h = m_\mathrm{S}\frac{3}{8}r \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)\frac{1}{4}h = \left(\frac{2}{3}\pi r^3\right)\frac{3}{8}r \quad \Rightarrow \quad h = r\sqrt{3}$$

por lo que

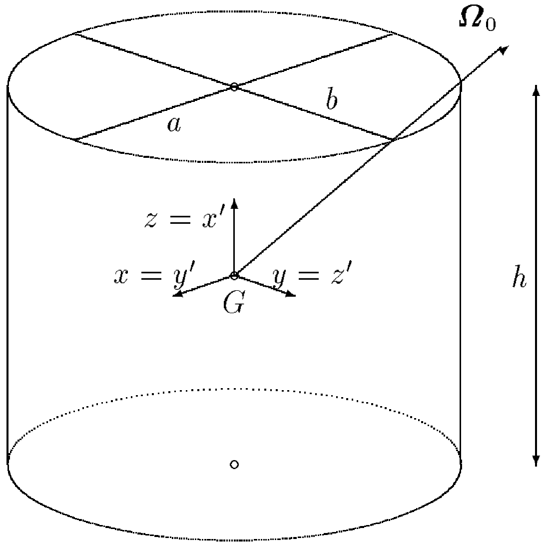
$$I_G = \frac{5 + 2\sqrt{3}}{20}mr^2$$

sustituyendo este valor en (3) resulta

$$\omega \geq 2.8537\sqrt{\frac{kg}{r}}$$

Ejercicio nº 64.-

1.- Sea $a = 0.5\,\mathrm{m}$ el semieje mayor y $b = 0.4\,\mathrm{m}$ el menor. Los momentos de inercia centrales, tomando la dirección x según el semieje a y la y según b, son:



$$I_x = \tfrac{1}{4}m\left(b^2 + \tfrac{h^2}{3}\right)$$

$$I_y = \tfrac{1}{4}m\left(a^2 + \tfrac{h^2}{3}\right)$$

$$I_z = \tfrac{1}{4}m(a^2 + b^2)$$

Ya que $I_y > I_x$, la condición del enunciado establece que $I_x = I_z$, y operando

$$\frac{1}{4}m\left(b^2 + \frac{h^2}{3}\right) = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \sqrt{3}a = 0.866 \ \mathrm{m}}$$

2.- Se trata de un movimiento de Poinsot (por inercia) de un sólido con tensor de inercia cilíndrico. Para facilitar la interpretación realizamos una rotación de los ejes consistente en una simple permutación cíclica,

$$(Gxyz) \quad \mapsto \quad (Gzxy) = (Gx'y'z')$$

de forma que el eje $Gz' = Gy$ es el de revolución del elipsoide de inercia, y los momentos de inercia según Gx' y Gy' son iguales con valor $I_z = I_x$. En estos nuevos ejes las componentes de la velocidad angular inicial son

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{200}{\sqrt{(h/2)^2 + b^2}}(h/2, 0, b) = (146.9106, 0, 135.7102)\,\mathrm{rad/s}$$

Al tratarse de un movimiento por inercia el momento cinético se conserva en magnitud y dirección:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{200}{\sqrt{(h/2)^2 + b^2}}(I_z h/2, 0, I_y b)$$

cuyo módulo constante vale

$$H = |\boldsymbol{H}_G| = 4536.622\,\mathrm{kg\ m^2/s}$$

Emplearemos la notación habitual de ángulos de Euler, que aquí tienen el significado siguiente:

- nutación θ: ángulo que forma el eje de revolución $Gz' = Gy$ con el eje invariante $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}_G/H$
- precesión ψ: giro del eje de revolución alrededor del eje invariante
- rotación propia φ alrededor del eje de revolución

Al ser el tensor cilíndrico, el movimiento por inercia se caracteriza por las siguientes constantes:

1. nutación constante,
$$\cos\theta = \frac{I_y \Omega_{z'}}{H} = 0.7479 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 41.59°;$$
2. velocidad de rotación alrededor de Gz' constante,
$$\Omega_{z'} = 135.7102\,\mathrm{rad/s};$$
3. velocidad de precesión constante,
$$\dot{\psi} = \frac{H}{I_x} = 221.2986\,\mathrm{rad/s};$$

de las dos últimas se deduce también que la velocidad de rotación propia es constante,
$$\dot{\varphi} = \Omega_{z'} - \dot{\psi}\cos\theta = \frac{I_x - I_y}{I_x}\Omega_{z'} = -29.79\,\mathrm{rad/s}$$