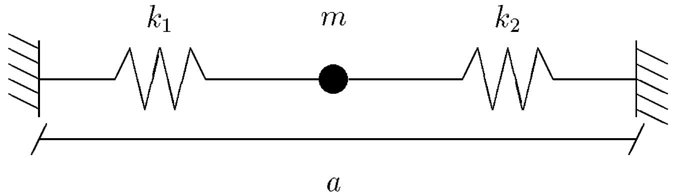
MECÁNICA

Práctica n$^{\underline{o}}$ 17 curso 95-96

81. Una placa rectangular homogénea de masa M y lados (a, b) está en posición horizontal apoyada en sus extremos por cuatro muelles verticales idénticos de constante k. Determinar para pequeñas oscilaciones las frecuencias y los modos de vibración.

82. Una partícula de masa m se puede mover sobre una recta bajo la influencia de dos resortes unidos a puntos fijos separados una distancia a. Los resortes cumplen la ley de Hooke (es decir, son lineales), tienen longitudes naturales nulas y constantes de rigidez k_1 y k_2, respectivamente. Se pide:



1. Tomando como coordenada generalizada la posición q de la partícula respecto a un punto fijo, hallar la Lagrangiana y la Hamiltoniana correspondiente. ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la Hamiltoniana?
2. Introducir una nueva coordenada Q definida por

$$Q = q - b \operatorname{sen}(\omega t), \quad b = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2}$$

¿Cuál es la Lagrangiana en función de Q? ¿Cual es la Hamiltoniana correspondiente? ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la Hamiltoniana?

83. Se monta un cilindro uniforme de radio a y densidad ρ de manera que puede girar libremente alrededor de un eje vertical. Sobre su superficie lateral está fija rígidamente una pista helicoidal de paso p a lo largo de la cual puede deslizar sin rozamiento un punto material de masa m. Supongamos que una partícula parte del reposo en la parte superior del cilindro y desliza bajo la influencia de la gravedad. Deducir la Hamiltoniana del sistema y estudiar el movimiento del mismo.

84. Sea H una Hamiltoniana de un sistema que tiene la forma

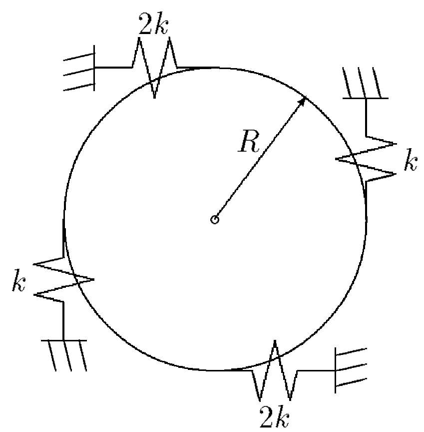
$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, p_2, \ldots)$$

Se pide:

1. Demostrar que $f(q_1, p_1)$ es una constante del movimiento.
2. Hallar las constantes del movimiento de una partícula de masa m sometida al potencial $V = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}/r^3$, siendo $\boldsymbol{a}$ un vector constante.

85. Sobre un plano horizontal perfectamente liso está situado un anillo de masa M y radio R conectado a cuatro muelles. La configuración de la figura corresponde a la posición de equilibrio estable y en ella los muelles carecen de tensión.

Se pide para pequeños movimientos hallar la frecuencias naturales del sistema en su posible movimiento en el plano horizontal.



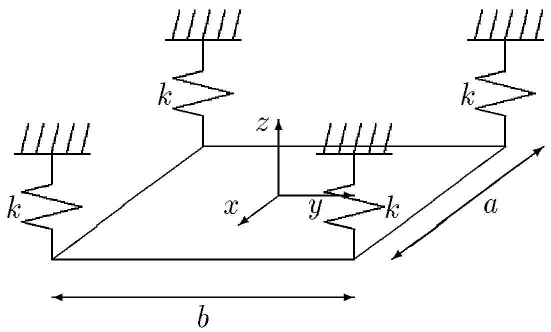
MECÁNICA

Práctica nº 17

curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 81.-



Obtendremos la Lagrangiana tomando como coordenadas la z del centro de masa de la placa y los giros de ejes x e y (θ_x, θ_y), en la hipótesis de pequeños desplazamientos:

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}Ma^2\right)(\dot{\theta}_y)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}Mb^2\right)(\dot{\theta}_x)^2$$

$$\begin{aligned} V &= Mgz + \frac{1}{2}k\left[\left(-\frac{\theta_y a}{2} - \frac{\theta_x b}{2} + z\right)^2 + \left(-\frac{\theta_y a}{2} + \frac{\theta_x b}{2} + z\right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{\theta_y a}{2} + \frac{\theta_x b}{2} + z\right)^2 + \left(\frac{\theta_y a}{2} - \frac{\theta_x b}{2} + z\right)^2\right] \end{aligned}$$

derivando quedan las siguientes ecuaciones de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} M\ddot{z} + 4kz = -Mg \\[2ex] \dfrac{1}{12}Ma^2\ddot{\theta}_y + ka^2\theta_y = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{12}Mb^2\ddot{\theta}_x + kb^2\theta_x = 0 \end{array}\right\}$$

Comprobamos que las tres ecuaciones resultan desacopladas, definiendo tres movimientos independientes entre sí. Las frecuencias propias son

$$\omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{M}}; \quad \omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{\frac{3k}{M}}$$

Los modos son:

$$\|1,0,0\|, \ \|0,1,0\| \text{ y } \|0,0,1\|$$

Si normalizamos respecto de la matriz de masas:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{m}},0,0\right\|, \ \left\|0,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{m}a},0\right\|, \ \left\|0,0,\frac{2\sqrt{3}}{a\sqrt{M}}\right\|$$

Ejercicio nº 82.-

1.- Sea q la distancia de m al extremo fijo del resorte k_1.

La Lagrangiana vale

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q})^2 - \frac{k_1}{2}(q)^2 - \frac{k_2}{2}(a-q)^2$$

El momento conjugado a q es

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

La Hamiltoniana es

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}k_1 q^2 + \frac{1}{2}k_2(a-q)^2$$

La energía se conserva (fuerzas derivadas de un potencial independiente de t), y la Hamiltoniana coincide con la energía, se conserva también.

2.- Se hace el cambio de variable $Q = q - b\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Derivando,

$$\dot{q} \ = \ \dot{Q} + b\omega\cos(\omega t)$$

La nueva Lagrangiana es:

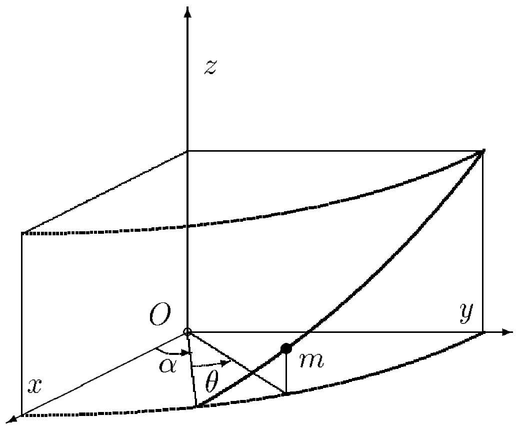
$$L = \frac{1}{2}m[\dot{Q} + b\omega\cos(\omega t)]^2 - \frac{k_1}{2}[Q + b\,\mathrm{sen}(\omega t)]^2 - \frac{k_2}{2}[a - Q - b\,\mathrm{sen}(\omega t)]^2$$

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = m[\dot{Q} + b\omega\cos(\omega t)] \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{P}{m} - b\omega\cos(\omega t)$$

$$H = P\dot{Q} - L = \frac{P^2}{2m} - bP\omega\cos(\omega t) + \frac{k_1}{2}[Q + b\,\mathrm{sen}(\omega t)]^2 + \frac{k_2}{2}[a - Q - b\,\mathrm{sen}(\omega t)]^2$$

En este segundo caso la energía se conserva también mientras que la Hamiltoniana ya no se conserva, depende del tiempo. Lógicamente, tampoco coincide con la energía. Este ejemplo muestra cómo, para un sistema material dado, las propiedades de conservación de la Hamiltoniana pueden depender del sistema de referencia elegido. Sin embargo, la energía posee un significado físico que trasciende a la elección de coordenadas.

Ejercicio nº 83.-



Se denomina α al giro del cilindro, θ a la posición angular de la partícula relativa al cilindro, e I_z al momento de inercia del cilindro respecto de su eje. Obtendremos en primer lugar la Lagrangiana $L = T - V$,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m[a^2(\dot\alpha + \dot\theta)^2 + (p\dot\theta)^2] + \frac{1}{2}I_z(\dot\alpha)^2 \\ V &= mg\theta p \end{aligned}$$

Los momentos son

$$p^\theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = ma^2(\dot\alpha + \dot\theta) + mp^2\dot\theta$$

$$p^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} = ma^2(\dot\alpha + \dot\theta) + I_z\dot\alpha$$

despejando las velocidades,

$$\dot\alpha = \frac{(ma^2 + mp^2)p^\alpha - ma^2 p^\theta}{(ma^2 + mp^2)I_z + m^2a^2p^2} \tag{1}$$

$$\dot\theta = \frac{(ma^2 + I_z)p^\theta - ma^2 p^\alpha}{(ma^2 + mp^2)I_z + m^2a^2p^2} \tag{2}$$

La expresión simplificada de H es

$$H = p^\alpha\dot\alpha + p^\theta\dot\theta - L = \frac{1}{2}p^\alpha\dot\alpha + \frac{1}{2}p^\theta\dot\theta + V$$

Sustituyendo $\dot\alpha$ y $\dot\theta$

$$H = \frac{1}{2}\frac{(ma^2 + mp^2)(p^\alpha)^2 + (ma^2 + I_z)(p^\theta)^2 - 2ma^2p^\theta p^\alpha}{(ma^2 + mp^2)I_z + m^2a^2p^2}$$

Derivando, se obtinen las ecuaciones de Hamilton,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \theta} &= mgp = -\dot{p}^{\theta} \\
\frac{\partial H}{\partial \alpha} &= 0 = -\dot{p}^{\alpha} \\
\frac{\partial H}{\partial p^{\alpha}} &= \frac{(ma^2+mp^2)p^{\alpha} - ma^2 p^{\theta}}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2} = \dot{\alpha} \\
\frac{\partial H}{\partial p^{\theta}} &= \frac{(ma^2+I_z)p^{\theta} - ma^2 p^{\alpha}}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2} = \dot{\theta}
\end{aligned}\right\}$$

Comprobamos que las dos últimas coinciden con las calculadas antes para el cambio de variables (1) y (2). Las dos primeras admiten integrales directas,

$$p^{\alpha} = C_1; \quad p^{\theta} = -mgpt + C_2.$$

Sustituyendo ests valores de p^{α} y p^{θ} en las otras dos ecuaciones de Hamilton quedan ecuaciones diferenciales independientes en α y θ:

$$\dot{\alpha} = \frac{(ma^2+mp^2)C_1 - ma^2(-mgpt + C_2)}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2} \tag{3}$$

$$\dot{\theta} = \frac{(ma^2+I_z)(-mgpt + C_2) - ma^2 C_1}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2} \tag{4}$$

que se integran directamente:

$$\alpha = \frac{(ma^2+mp^2)C_1 t - ma^2(-mgpt^2/2 + C_2 t) + C_3}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2} \tag{5}$$

$$\theta = \frac{(ma^2+I_z)(-mgpt^2/2 + C_2 t) - ma^2 C_1 t + C_4}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2} \tag{6}$$

Impondremos ahora las condiciones iniciales ($\alpha|_0 = \theta|_0 = \dot{\alpha}|_0 = \dot{\theta}|_0 = 0$); de las dos últimas se deduce

$$p^{\alpha}|_0 = p^{\theta}|_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$$

y de las dos primeras, aplicando las ecuaciones (5) y (6),

$$C_3 = C_4 = 0;$$

con lo que sustituyendo en (5) y (6) resulta finalmente

$$\alpha = \frac{m^2a^2gpt^2/2}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2}; \quad \theta = -\frac{(ma^2+I_z)mgpt^2/2}{(ma^2+mp^2)I_z + m^2a^2p^2}$$

Ejercicio nº 84.-

1.- Obtendremos las derivadas parciales de H respecto de (q_1, p_1), que a su vez permiten expresar las de f:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial q_1} = \dfrac{\partial H}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} = -\dot{p}_1 \\[2ex] \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{\partial H}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial p_1} = \dot{q}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial q_1} = -\dfrac{\dot{p}_1}{\partial H/\partial f} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial p_1} = \dfrac{\dot{q}_1}{\partial H/\partial f} \end{array}$$

Por lo que, desarrollando la derivada de f, comprobamos que se anula:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\dot{p}_1 = -\frac{\dot{p}_1}{\partial H/\partial f}\dot{q}_1 + \frac{\dot{q}_1}{\partial H/\partial f}\dot{p}_1 = 0$$

2.- Tomaremos coordenadas esféricas, eligiendo la dirección $N-S$ de las mismas (versor $\boldsymbol{k}$) según la dirección del vector fijo $\boldsymbol{a}$. De esta forma, $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{k}$, con lo que $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = ar\,\mathrm{sen}\,\theta$. La Lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}\cos\theta)^2] - a\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}$$

y los momentos generalizados

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = p^r \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = p^\theta \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\cos^2\theta\dot{\varphi} = p^\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{r} = \dfrac{p^r}{m} \\[2ex] \dot{\theta} = \dfrac{p^\theta}{mr^2} \\[2ex] \dot{\varphi} = \dfrac{p^\varphi}{mr^2\cos^2\theta} \end{array}$$

La Hamiltoniana vale

$$\begin{aligned} H &= p^r\dot{r} + p^\varphi\dot{\varphi} + p^\theta\dot{\theta} - L \\ &= p^r\frac{p^r}{m} + p^\varphi\frac{p^\varphi}{mr^2\cos^2\theta} + p^\theta\frac{p^\theta}{mr^2} - \\ &\quad \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p^r}{m}\right)^2 + \left(\frac{rp^\theta}{m}\right)^2 + \left(\frac{r\cos\theta p^\varphi}{mr^2\cos^2\theta}\right)^2\right] + a\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} \\ &= \frac{(p^r)^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2}\left[\frac{(p^\varphi)^2}{\cos^2\theta} + (p^\theta)^2 + 2am\,\mathrm{sen}\,\theta\right] \end{aligned}$$

La energía total $(T+V)$ es constante, al provenir las fuerzas de un potencial que no depende del tiempo. Por otra parte, φ no aparece en la Lagrangiana (ni en la Hamiltoniana lógicamente), por lo que es cíclica, es decir, $p^\varphi = \text{cte}$.

Teniendo en cuenta esta última circunstancia, el término

$$\left[\frac{(p^\varphi)^2}{\cos^2\theta} + (p^\theta)^2 + 2am \operatorname{sen}\theta\right]$$

en la expresión anterior de H establece una separación funcional del tipo $f(\theta, p^\theta)$, por lo que se puede aplicar directamente el resultado del apartado anterior, y afirmar que es constante.