MECANICA

Practica n$^{\underline{o}}$ 2   curso 95-96

6. Sea un plano horizontal y un sistema de referencia ortogonal Oxy en el mismo. Un hombre parte del punto O y recorre el eje Ox con velocidad constante v.

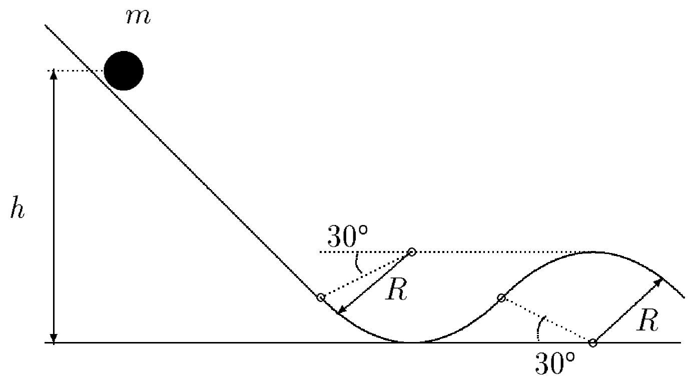
Un perro parte del punto $(0, a)$ con velocidad de módulo constante igual a v/k y persigue al hombre de tal forma que en todo momento su vector velocidad va dirigido hacia donde se encuentra éste.

Calcular la trayectoria seguida por el perro y estudiar en que casos llega a alcanzar al hombre.

7. Un péndulo simple de masa m y longitud l se suelta en reposo en posición horizontal. Un clavo situado a una distancia d por debajo del punto fijo del péndulo obliga a la masa m a describir una circunferencia de radio $l - d$ a partir del instante en que el hilo toca al clavo. Calcular el valor mínimo de d para que la masa describa una circunferencia completa.

8. Una masa m desliza sin rozamiento sobre la curva indicada en la figura, formada por una recta inclinada 60°, un arco de circunferencia de 120° y radio R, cóncavo hacia arriba, seguido por otro arco de circunferencia tangente al anterior e igual pero convexo hacia arriba. La masa parte del reposo desde el punto situado a altura h. Se pide:

1. Valor mínimo de h para el que la partícula se despega de la curva y posición del punto de despegue.
2. Para valores de h mayores que el calculado en el apartado anterior, obtener la posición del punto de despegue.
3. Posición del punto más alto de la trayectoria al que puede llegar la partícula sin despegarse, para cualquier valor de h.



9. Una partícula pesada de masa m se mueve con enlace bilateral liso por la superficie

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

referida a un sistema ortogonal $Oxyz$ en el que Oz es la vertical ascendente.

Además del peso, el punto es atraido por el origen de coordenadas con una fuerza proporcional a la distancia, cuya expresión es

$$\boldsymbol{F} = -Km\boldsymbol{r}$$

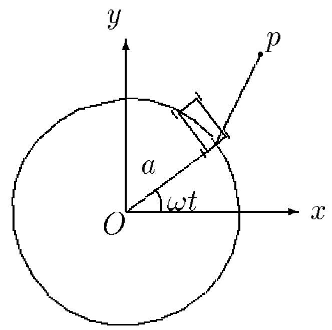
Inicialmente, el punto se encuentra en el origen de coordenadas O y su velocidad es $\boldsymbol{v} = 2Ka\,\boldsymbol{i}$

Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Ecuaciones horarias del movimiento de la partícula.
3. Reacción de la superficie en un instante genérico.

10. En un plano horizontal perfectamente liso, un patinador p es arrastrado por un vehículo que describe una circunferencia de centro O y radio a, con velocidad angular constante ω. El patinador se encuentra unido al vehículo por una varilla sin masa de longitud a. Inicialmente, el vehículo ocupa la posición $(a, 0)$ y el patinador se encuentra en reposo en (2a,0). Se pide:

1. Ecuaciones horarias del movimiento del patinador.
2. Trabajo realizado por el vehículo entre el instante inicial y un tiempo suficientemente largo.
3. Si se sustituye la varilla por una cinta flexible con posibilidad de arrugarse si se somete a compresión, estudiar si se presenta esta circustancia y precisar con exactitud dónde se produce.



MECANICA

Practica nº 2 curso 95-96

Soluciones

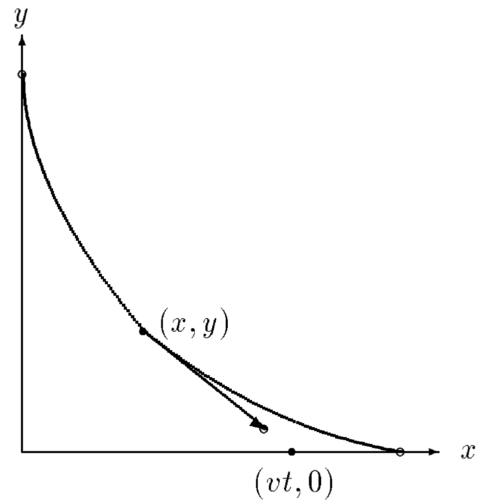
Ejercicio nº 6.-

Sea un punto genérico (x, y) de la trayectoria del perro. La dirección del vector velocidad es la de $(vt - x, -y)$:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{x - vt} \qquad (1)$$

El módulo de la velocidad es constante e igual a v/k:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{v^2}{k^2} \qquad (2)$$



Operando en (1):

$$x - vt = \frac{y\,dx}{dy}$$

y diferenciando esta expresión:

$$dx - v\,dt = dx + y\,d\left(\frac{dx}{dy}\right) \quad \Rightarrow \quad -v\,dt = y\,d\left(\frac{dx}{dy}\right) \qquad (3)$$

Por otra parte, operando en (2):

$$dx^2 + dy^2 = \frac{v^2}{k^2}dt^2 \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{k}{v}\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy \qquad (4)$$

donde se ha tomado el signo menos para la raíz porque según aumenta t disminuye y.

Eliminando dt entre (3) y (4):

$$k\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy = y\,d\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

En esta ecuación diferencial se pueden separar las variables (dx/dy) e y:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{k\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}} = \frac{1}{y}dy$$

Podemos ya integrar esta ecuación, considerando que inicialmente $y = a$ y $dx/dy = 0$ (la velocidad se dirige según la vertical). Resulta:

$$\operatorname{arg\,senh} \frac{dx}{dy} = k \ln \frac{y}{a}$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{a} \right)^k - \left(\frac{y}{a} \right)^{-k} \right]$$

Volvemos a integrar, considerando que inicialmente $(x, y) = (0, a)$. El resultado depende del valor de k:

$$\begin{cases} x = \dfrac{ak}{1-k^2} + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{y^{k+1}}{(k+1)a^k} - \dfrac{y^{1-k}}{(1-k)a^{-k}} \right) & \text{(si } k \neq 1) \\[2ex] x = \dfrac{y^2}{4a} - \dfrac{a}{2} \ln y - \dfrac{a}{4} + \dfrac{a}{2} \ln a & \text{(si } k = 1) \end{cases}$$

Para estudiar si el perro alcanza al hombre evaluamos $\lim_{y \to 0} x$, según los valores de k, admitiendo siempre que $k > 0$:

$$\text{si } k \neq 1: \qquad \lim_{y \to 0} x = \frac{ak}{1-k^2} + \frac{1}{2} \lim_{y \to 0} \frac{y^{1-k}}{(k-1)a^{-k}}$$

$$\text{si } k = 1: \qquad \lim_{y \to 0} x = +\infty$$

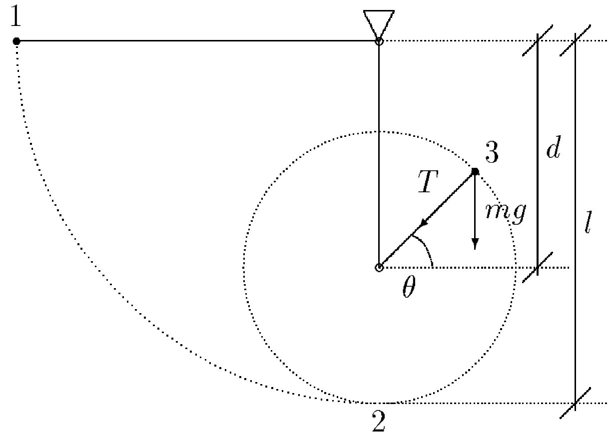
Se obtienen por tanto los tres casos siguientes:

a. si $k > 1$, $\lim_{y \to 0} x = +\infty$; La velocidad del perro es menor que la del hombre, por lo que nunca lo alcanza.

b. si $k < 1$, $\lim\limits_{y \to 0} x = \dfrac{ak}{1-k^2}$; Al ser la velocidad del perro mayor, lo alcanza en el punto $x = \dfrac{ak}{1-k^2}$.

c. si $k = 1$, $\lim_{y \to 0} x = +\infty$; Si la velocidad del perro es igual que la del hombre, tampoco lo alcanza nunca.

Ejercicio nº 7.-



Calculamos en primer lugar la velocidad con la que comienza la partícula a describir la circunferencia de radio $(l-d)$, en el punto 2, planteando la conservación de la energía desde 1:

$$mgl = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gl}$$

Para que la partícula describa la circunferencia completa, el hilo ha de estar tenso a lo largo de todo el movimiento. Llamando T a la tensión del hilo, la condición es pues $T \geq 0$. En una posición genérica 3 en que el hilo forme un ángulo θ con la horizontal, podemos establecer la ecuación fundamental de la dinámica en la dirección del hilo:

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta + T = m\frac{v^2}{l-d};$$

Para que sea $T \geq 0$ debe cumplirse

$$v^2 \geq (l-d)g\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1}$$

La velocidad v en 3 se obtiene planteando la conservación de la energía entre 2 y 3:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg(l-d)(1+\mathrm{sen}\,\theta) \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gl - 2g(l-d)(1+\mathrm{sen}\,\theta)$$

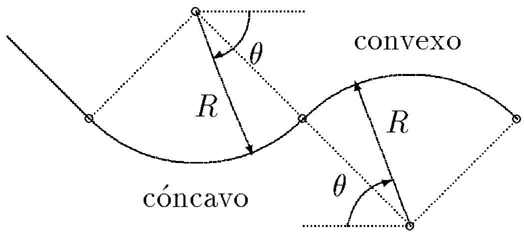
y combinando con (1) se obtiene

$$2gd \geq 3g(l-d)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

El punto peor es $\theta = \pi/2$, el más alto del círculo de radio $(l-d)$. Particularizando en él la expresión anterior se obtiene la condición

$$\boxed{d \geq \frac{3}{5}l}$$

Ejercicio nº 8.-



1.- En primer lugar observamos que la reacción normal en dos puntos genéricos de la parte cóncava y de la parte convexa vale respectivamente:

$$N_{\text{conc}} - mg \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R} \tag{1}$$

$$N_{\text{conv}} - mg \operatorname{sen}\theta = -m\frac{v^2}{R} \tag{2}$$

De (1) y (2) se deducen dos conclusiones importantes:

- En el instante de despegue ($N = 0$) la partícula ha de estar en la parte convexa. En efecto, para que sea $N = 0$ en la parte cóncava:

  $$0 - mg \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = -gR \operatorname{sen}\theta$$

  ecuación que carece de solución real para v, al ser $\operatorname{sen}\theta > 0$.

- Cuando la partícula entra en el tramo convexo, el valor de la normal tiene un salto:

  $$N_{\text{conc}} - N_{\text{conv}} = 2m\frac{v^2}{R} \quad (\text{en el punto } \theta = 30°)$$

Planteamos ahora la condición de despegue en el tramo convexo; a través de la conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR \operatorname{sen}\theta \tag{3}$$

Sustituyendo (a partir de (2) con $N_{\text{conv}} = 0$) $v^2 = gR \operatorname{sen}\theta$:

$$mgh = \frac{1}{2}mgR \operatorname{sen}\theta + mgR \operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3}{2}R \operatorname{sen}\theta$$

Como $\theta \geq 30°$, el valor mínimo de h a partir del cual se despega se produce precisamente para $\theta = 30°$:

$$\boxed{h = \frac{3}{4}R}$$

2.- Para valores mayores de h, el despegue se produce también en $\theta = 30°$. En efecto, empleando la ecuación (3) en $\theta = 30°$:

$$h > \frac{3}{4}R \quad \Rightarrow \quad v^2 > 2g\frac{3}{4}R - gR = \frac{gR}{2}$$

y mediante la ecuación (2)

$$N_{\text{conv}} = \frac{mg}{2} - \frac{m}{R}v^2$$

para $v^2 > gR/2$ se obtiene $N_{\text{conv}} < 0$, lo cual es absurdo dado que la partícula se mueve con enlace unilateral; se produce por tanto el despegue en ese punto.

3.- La altura máxima que puede alcanzar la partícula en el tramo convexo, sin despegarse, se obtiene cuando se suelta a una altura $h < 3R/4$. Supongamos que la altura es $h = 3R/4 - \epsilon$, siendo $\epsilon > 0$ un valor positivo arbitrario. Aplicando las ecuaciones (3) y (2) para esta altura, se obtiene:

$$N_{\text{conv}} = 3mg\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\right) + 2mg\frac{\epsilon}{R} \tag{4}$$

Particularizando para $\theta = 30°$, observamos que no se produce despegue en este punto:

$$N_{\text{conv}}|_{\theta=30°} = 2mg\frac{\epsilon}{R} > 0$$

Si derivamos la expresión (4),

$$\frac{d}{d\theta}N_{\text{conv}} = 3mg\cos\theta$$

comprobamos que la normal N_{conv} crece, siempre que sea $\theta < \pi/2$, es decir, antes del punto más alto de la curva. Por tanto, por pequeña que sea la diferencia ϵ, la partícula permanecerá sobre la curva, subiendo hasta que se agote su energía cinética. Esto ocurrirá para

$$mg\left(\frac{3R}{4} - \epsilon\right) = \overbrace{\frac{1}{2}mv^2}^{=0} + mgR\operatorname{sen}\theta,$$

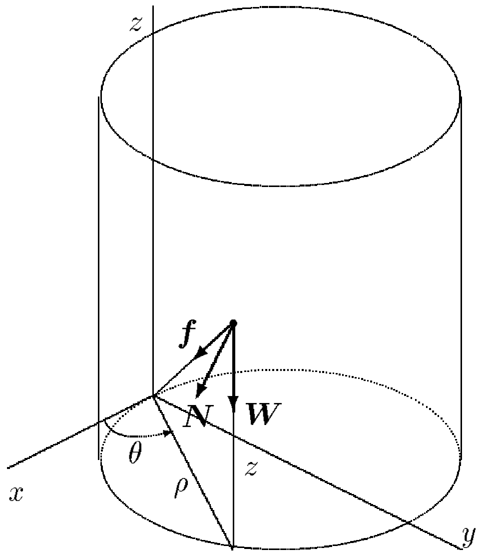
es decir,

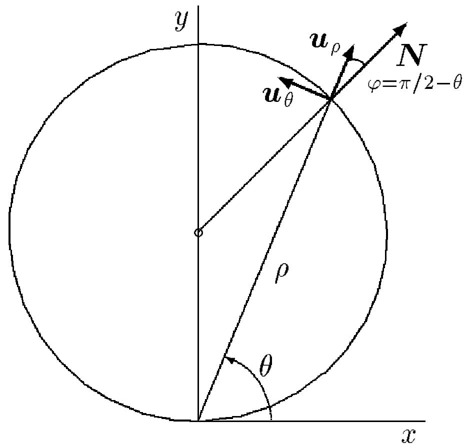
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{R}.$$

Lógicamente, obtendremos mayor altura cuanto más pequeño sea ϵ. En el límite,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 48.59°}$$

Ejercicio nº 9.-





1.- Expresamos en primer lugar las fuerzas sobre la partícula empleando coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f} = -K^2 m\,\boldsymbol{r} = -K^2 m(\rho \boldsymbol{u}_\rho + z\boldsymbol{u}_z) & \text{(resorte)} \\ \boldsymbol{W} = -mg\,\boldsymbol{u}_z & \text{(peso)} \\ \boldsymbol{N} = N \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\rho - N\cos\theta\,\boldsymbol{u}_\theta & \text{(reacción)} \end{cases}$$

La ecuación del cilindro es

$$\rho = 2a \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

de donde, derivando,

$$\dot\rho = 2a\dot\theta\cos\theta \tag{2}$$

$$\ddot\rho = 2a(\ddot\theta\cos\theta - \dot\theta^2 \operatorname{sen}\theta) \tag{3}$$

la aceleración es:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot\rho - \rho\dot\theta^2)\,\boldsymbol{u}_\rho + (\rho\ddot\theta + 2\dot\rho\dot\theta)\,\boldsymbol{u}_\theta + \ddot z\,\boldsymbol{u}_z$$

Planteando la ecuación fundamental de la dinámica, $\sum \boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$, e identificando coeficientes en cilíndricas, se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento:

$$-2K^2 ma \operatorname{sen}\theta + N\operatorname{sen}\theta = 2ma(\ddot\theta\cos\theta - 2\dot\theta^2\operatorname{sen}\theta) \tag{4}$$

$$- N\cos\theta = 2ma(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{5}$$

$$- K^2 z - g = \ddot{z} \tag{6}$$

Estas deben de considerarse conjuntamente con la ecuación algebraica del cilindro (1), para las cuatro incógnitas (ρ, θ, z, N).

2.- La ecuación (6) se integra de manera desacoplada de las demás

$$\ddot{z} + K^2 z = -g \quad \Rightarrow \quad z = A\operatorname{sen}(Kt + \varphi) - \frac{g}{K^2}$$

y particularizando para las condiciones iniciales ($z = 0$, $\dot{z} = 0$) se obtiene $\varphi = \pi/2$, $A = g/K^2$. Por tanto

$$z(t) = \frac{g}{K^2}(\cos Kt - 1) \tag{7}$$

La ecuación horaria $\theta = \theta(t)$ la obtendremos a partir de la conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz + \frac{1}{2}mK^2(\rho^2 + z^2) = \frac{1}{2}m4K^2a^2$$

sustituyendo las expresiones de (ρ, $\dot{\rho}$, z, $\dot{z}$) y operando se llega a:

$$\dot{\theta}^2 + K^2\operatorname{sen}^2\theta = K^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = K\cos\theta \tag{8}$$

Esta ecuación se puede resolver separando variables,

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = K\,dt,$$

e integrando con la condición inicial $\theta(0) = 0$:

$$\theta(t) = 2\left(\arctan e^{Kt}\right) - \frac{\pi}{2} \tag{9}$$

Por último, sustituyendo esta última en la ecuación del cilindro (1), se obtiene $\rho = \rho(t)$:

$$\rho(t) = 2a\operatorname{sen}\left(2\arctan e^{Kt} - \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = 2a\frac{e^{2Kt} - 1}{e^{2Kt} + 1} \tag{10}$$

3.- N se obtiene sustituyendo $\theta(t)$ en la ecuación de la dinámica (5):

$$N = -2ma\left(\ddot{\theta}\tan\theta + 2\dot{\theta}^2\right)$$

Operando se obtiene la siguiente expresión explícita en función de t:

$$N = -2maK^2\frac{10e^{2Kt} - e^{4Kt} - 1}{\left(e^{2Kt}+1\right)^2}$$

Observemos por último que para $t \to \infty$, a partir de las ecuaciones horarias (9) y (10), $\theta \to \pi/2$ y $\rho \to 2a$. El movimiento límite corresponde a la partícula moviéndose verticalmente sobre una generatriz diametralmente opuesta al eje Oz, entre los planos $z = 0$ y $z = -2g/K^2$. La justificación de este hecho particular es que la velocidad inicial dada es exactamente la necesaria para que partícula llegue a $\theta = \pi/2$ con velocidad horizontal nula. En efecto, de (8) con $\theta = \pi/2$ se obtiene $\dot{\theta} = 0$; asimismo, de (2) se obtiene $\dot{\rho} = 0$, como queríamos demostrar.