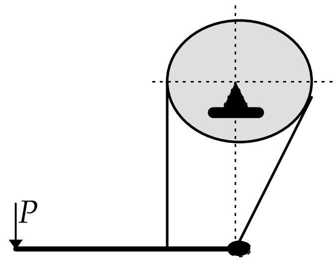
MECÁNICA

Práctica nº 20 curso 95-96

96.- Un hilo homogéneo, de longitud *b*, tiene un extremo fijo en un punto *O*. El otro extremo va unido a una pequeña anilla *A*, de masa despreciable, que puede deslizar, con rozamiento de ángulo φ, a lo largo de una varilla horizontal fija que pasa por *O*. Encontrar el valor máximo de la distancia *OA* para el que es posible el equilibrio.

97.- En la figura viene representado un freno de cinta. El radio de la polea es de 20 cm. La barra tiene un peso despreciable y su longitud es de 60 cm. El ramal de la derecha forma 30º con la vertical. El coeficiente de rozamiento entre cinta y polea es de 0,4. Determinar el par de frenado en función de la fuerza *P* que se ejerce en el extremo de la barra.



98.- Determinar cuál debe ser la longitud mínima de un hilo homogéneo para que quede en equilibrio pasando sobre dos clavos lisos que están fijos a la misma altura, separados una distancia *b*.

99.- Una bolita *M* está ensartada en un hilo homogéneo cuyos extremos se fijan a sendos puntos *A* y *B* situados a la misma altura. Si las masas de bolita e hilo son iguales, la longitud de éste es *2L*, y la bolita puede deslizar sin rozamiento sobre él, ¿qué separación debe haber entre *A* y *B* para que los dos tramos de hilo, a ambos lados de *M*, sean perpendiculares entre sí?

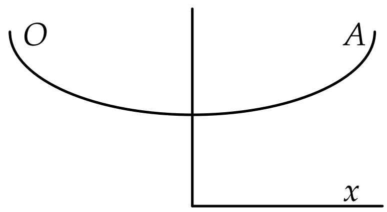
100.- Se desea que un hilo heterogéneo, suspendido entre dos puntos situados a la misma altura, quede en equilibrio en forma de arco de circunferencia. Encontrar la ley de variación de la densidad del hilo, para conseguirlo.

MECÁNICA

Práctica nº 20 curso 95-96

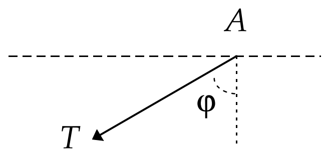
Soluciones

96.- Como el hilo queda suspendido de dos puntos (O y A) situados a la misma altura, su forma de equilibrio será una catenaria cuyo vértice estará en la mediatriz de OA. Si llamamos a al parámetro y x a la abscisa de A, al imponer la longitud del hilo obtenemos:



$$b = 2\,a\,Sh(x/a) \qquad \{I\}$$

Si ahora planteamos el equilibrio de la anilla A, vemos que la dirección de la tensión T del hilo (tangente a éste y, por tanto, con una pendiente que vale $Sh(x/a)$, como sabemos) no podrá desviarse de la normal a la varilla (que es la vertical) un ángulo superior a φ, por lo cual, en la posición extrema tendremos:



$$ctg\,\varphi = Sh(x/a) \qquad \{II\}$$

Eliminando $Sh(x/a)$ entre las dos ecuaciones obtenemos: $a = \frac{1}{2}\, b\, tg\varphi$

Resolviendo {II} en su expresión exponencial resulta: $e^{x/a} = (1+\cos\varphi)/sen\,\varphi$

por lo que finalmente:

$$OA = 2x = b.tg\varphi.Ln[(1 + \cos\varphi)/sen\,\varphi\,]$$

97.- Llamemos T_1 y T_2 a las tensiones respectivas de los ramales vertical e inclinado de la cinta. Tomando momentos en su articulación de las fuerzas que actúan sobre la barra obtenemos que $T_1 = 3\,P$.

El par de frenado M_f es igual al producto del radio por la diferencia de las tensiones en los dos ramales de la cinta. Aquí es importante observar que la polea puede girar en dos sentidos diferentes, lo que originará que la tensión mayor se encuentre en uno u otro ramal. Veamos ambos casos:

a) La polea gira en sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces: $T_2 = T_1\, e^{k\varphi}$ y el par valdrá: $M_f = (T_2 - T_1)\, r = 3\, r\, P\, (e^{k\varphi} - 1) = 3 \times 0{,}2 \times (e^{0{,}4 \cdot 7\pi/6} - 1) = 1.999\, P$ Nm

b) La polea gira en el sentido de las agujas del reloj. Ahora: $T_2 = T_1\, e^{-k\varphi}$ y el par valdrá: $M_f = 0{,}462\, P$ Nm

98.- En la posición de equilibrio el hilo adoptará la forma de una catenaria entre los dos clavos, colgando dos trozos iguales (por simetría) a ambos lados. Llamemos h a la longitud de cada uno de estos trozos y $2s$ a la de la catenaria. Igualando las tensiones del hilo a ambos lados del clavo tenemos: $q\ a\ Ch(b/2a) = q\ h$

Como sabemos: $s = a\ Sh(b/2a)$ por lo que la longitud total L del hilo será:

$$L = 2s + 2h = 2\ a\ [(Sh(b/2a) + Ch(b/2a)] = 2\ a\ e^{b/2a}$$

Como nos piden la longitud mínima, haremos $dL/da = 0$ con lo que:

$$e^{b/2a}\ (1 - b/2a) = 0 \qquad \text{es decir:} \qquad a = b/2$$

por lo que finalmente: $L = b\ e$

99.- Por simetría, la bolita quedará en equilibrio en el punto medio del hilo. La forma del hilo entre A y M (y entre M y B será la simétrica) será un arco de catenaria, del que desconocemos su vértice V y su parámetro a.

Planteando el equilibrio de M (llamando T a la tensión del hilo en ese punto): $2\ T\ \sqrt{2}/2 = 2\ q\ L$ luego: $T = \sqrt{2}\ q\ L$ Pero sabemos que la componente horizontal de la tensión vale qa, luego: $T\sqrt{2}/2 = q\ L = q\ a$ o sea: $a = L$

Llamemos x a la abscisa de M y $2b$ a la separación horizontal entre A y B, con lo que la abscisa de B será $x+b$.

Como la pendiente en M es de 45º: $Sh\ (x/L) = 1$ de donde: $x = L.Ln(1+\sqrt{2})$

Haciendo que el arco $MB = L$: $L[Sh(x+b)/L - Sh(x/L)] = L$ luego: $x+b = L.Ln(2+\sqrt{5})$

La separación pedida valdrá: $2b = 2\ L.Ln[(2+\sqrt{5})/\ (1+\sqrt{2})]$

100.- Situemos un punto cualquiera P del hilo mediante el ángulo φ que forma OP con la vertical (siendo O el centro del arco de circunferencia deseada). En nuestro caso, el peso específico q será $q(\varphi)$, que será la ley pedida. Las ecuaciones intrínsecas de equilibrio serán (llamando T a la tensión y r al radio del arco):

Sobre normal: $q(\varphi)\ cos\varphi = T/r$ Sobre tg: $q(\varphi)\ sen\varphi = dT/ds$

Como $ds = r\ d\varphi$ obtenemos: $q(\varphi)\ sen\varphi = q'(\varphi)\ cos\varphi - q(\varphi)\ sen\varphi$ que integrada (llamando q_0 al valor en el punto más bajo) nos da: $q = q_0\ /cos^2\varphi$