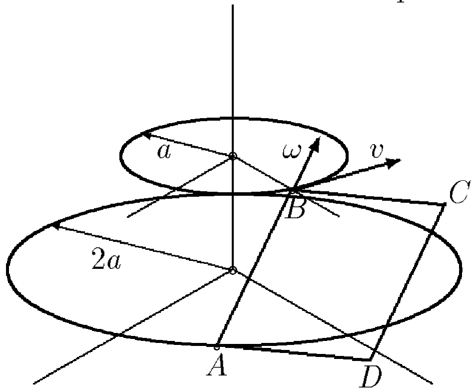
MECANICA

Practica n$^{\underline{o}}$ 5

curso 95-96

21. Una placa $ABCD$ se mueve de forma que los dos vértices A y B describen dos circunferencias paralelas con el mismo eje, de radios $2a$ y a respectivamente, situada esta última a una distancia a sobre la primera, siendo la velocidad con que recorre el punto B la circunferencia superior $v = a\omega$. Al tiempo, la placa gira alrededor del eje AB con velocidad angular ω. Se conoce la distancia $AB = 2a$. Se pide:

1. velocidad y aceleración angular de la placa;
2. eje del movimiento helicoidal tangente y velocidad mínima de este movimiento;
3. axoides del movimiento.



22. Se considera la barra AB, referida a unos ejes cartesianos rectangulares. El punto A desliza sobre Ox, mientras la barra AB gira alrededor de A. Se pide:

1. Relación entre $x = OA$ y el ángulo θ para que las velocidades de los puntos A y B tengan igual módulo.
2. Obtener la base y ruleta del movimiento.

23. Una recta Ox gira en un plano fijo alrededor de un punto fijo O con una velocidad angular constante ω. A su vez, un disco C de radio R rueda sin deslizar sobre Ox. Se pide:

1. Encontrar la velocidad de rotación instantánea Ω de C en función de $x = OA$, $\dot{x}$ y ω. A corresponde al punto de contacto del disco con la recta Ox.
2. Obtener las polares del movimiento absoluto del disco C.

24. Un círculo que gira con velocidad angular ω alrededor de uno de sus puntos O, tiene radio R y es cortado por un eje Ox fijo, en un punto variable M. Un segundo círculo de radio r rueda sin deslizar sobre el primero de tal forma que siempre se tocan en M. Se pide:

1. Base y ruleta del movimiento absoluto del segundo círculo.
2. Hallar la velocidad de rotación de este segundo disco.
3. Trayectoria del centro del segundo disco.
4. Aceleración de este centro cuando M coincide con O.

25. Consideremos un triángulo equilátero OAB de lado a que se mueve de forma que el lado OB describe el plano xOy de un sistema de referencia ortogonal y el lado OA describe el plano yOz, permaneciendo fijo el vértice O. Inicialmente el plano del triángulo coincide con xOy y el movimiento transcurre de modo que OA gira en el sentido de Oy a Oz con velocidad constante ω. Se pide:

1. Axoides del movimiento.
2. Velocidad angular inicial de OB.
3. Velocidad inicial del punto medio M de AB.
4. Valor inicial de $d\boldsymbol{\Omega}/dt$ siendo $\boldsymbol{\Omega}$ el vector velocidad de rotación del sólido OAB.
5. Aceleración inicial de M.

NOTA: Como sistema de referencia ligado a OAB se eligirán unos ejes $OXYZ$ tales que:

- $OX \equiv OB$.
- $OY \equiv$ Normal a OB en el plano OAB siendo la parte positiva la que está en el mismo semiplano que OA.
- $OZ \equiv$ Normal por O al plano OAB de forma que el triedro $OXYZ$ sea a derechas.

Se llamará φ al ángulo de OB con Ox, λ al de OA con Oy y θ al de OZ con Oz.

⋆

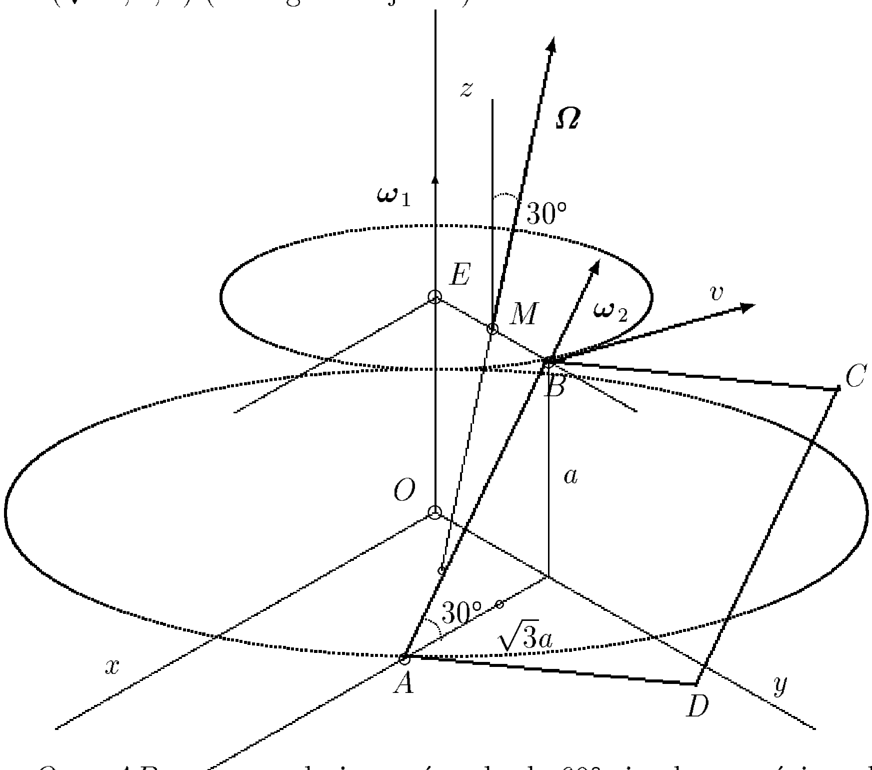
MECANICA

Practica nº 5 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 21.-

1.- El movimiento de la placa se puede interpretar como la composición de dos rotaciones de módulo ω, una según el eje Oz ($\boldsymbol{\omega}_1$) y otra según AB ($\boldsymbol{\omega}_2$). Es inmediato calcular la orientación de AB, que viene fijada por la longitud del segmento $AB = 2a$; situando B en las coordenadas $(0, a, a)$, el punto A estará en $(\sqrt{3}a, a, 0)$ (ver figura adjunta).



Los ejes Oz y AB se cruzan bajo un ángulo de $60°$ siendo su mínima distancia el segmento BE. Por tanto el movimiento resultante es un movimiento helicoidal general (es decir, *no es una rotación pura*).

La velocidad angular es la suma de $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \underbrace{\omega \boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{\omega}_1} + \underbrace{\omega \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k} \right)}_{\boldsymbol{\omega}_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{\Omega} = -\omega \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} + \omega \frac{3}{2}\boldsymbol{k}}$$

El movimiento es tal que $\boldsymbol{\Omega}$ efectúa un giro alrededor de Oz, manteniendo su módulo, orientación y posición relativa a este eje. Por tanto, la aceleración angular proviene de la rotación alrededor de $\boldsymbol{\omega}_1$:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \omega \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \boldsymbol{j}}$$

2.- El eje del movimiento helicoidal tangente es el que pasa por el punto medio de BE, $M = (0, a/2, a)$, y tiene por dirección la de $\boldsymbol{\Omega}$. Se comprueba que ésta forma 30° con Oz (60° con el plano Oxy) (ver figura).

La velocidad mínima del movimiento o velocidad de deslizamiento es la de los puntos del eje helicoidal, y se calcula proyectando la velocidad de un punto cualquiera sobre la dirección del eje:

$$v_{\min} = \boldsymbol{v}_B \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\min} = \frac{a\omega}{2};}$$

esta velocidad está orientada según la dirección del propio eje, por lo que la expresión vectorial es

$$\boldsymbol{v}_{\min} = v_{\min} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v}_{\min} = \frac{a\omega}{4}(-\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\boldsymbol{k})}$$

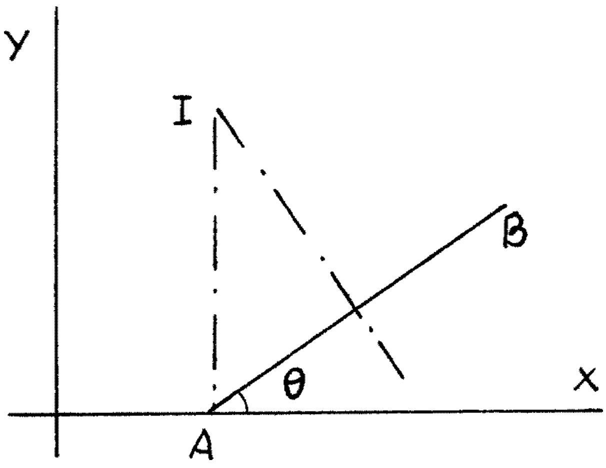
3.- El axoide fijo es la superficie reglada de revolución que genera el eje helicoidal obtenido al girar alrededor de Oz. Ésta es, como debe saberse, un *hiperboloide de una hoja* o hiperboloide hiperbólico (de revolución). Su elipse de garganta es la circunferencia de radio $a/2$ situada en el plano de la circunferencia superior (de centro E). Mediante operaciones algebraicas sencillas se puede obtener la ecuación implícita del mismo que es

$$\boxed{x^2 + y^2 - \frac{(z-a)^2}{3} = \frac{a^2}{4}}$$

El axoide móvil es otro hiperboloide igual al anterior pero con el eje de revolución sobre AB, compartiendo en todo instante la generatriz común que es el eje del movimiento helicoidal.

Ejercicio nº 22.-

Designamos por $2a = |\boldsymbol{AB}|$ la longitud de la barra, y θ el ángulo que forma con el eje Ox.



1.- Como el punto A describe el eje Ox, el centro instantáneo de rotación (I) estará en la perpendicular por el punto A al mismo, y para que los módulos de $\boldsymbol{v}_A$ y $\boldsymbol{v}_B$ sean iguales debe pertenecer a la mediatriz del segmento AB. El punto de intersección será el C.I.R. De la figura deducimos:

$$|\boldsymbol{IA}| = |\boldsymbol{IB}| = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$v_A = \dot{\theta}\,|\boldsymbol{IA}| = \dot{x}; \quad v_B = \dot{\theta}\,|\boldsymbol{IB}|$$

Se obtiene pues

$$\dot{\theta}\frac{a}{\operatorname{sen}\theta} = \dot{x}$$

ecuación que se integra directamente, suponiendo que inicialmente para $x = 0$ $\theta = \pi/2$:

$$a\int_{\pi/2}^{\theta}\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \int_0^x dx$$

El resultado es:

$$a\ln\tan\frac{\theta}{2} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\frac{\theta}{2} = e^{x/a}}$$

2.- Es evidente que la ruleta (polar móvil) será la propia mediatriz del segmento AB.

Obtengamos la base:

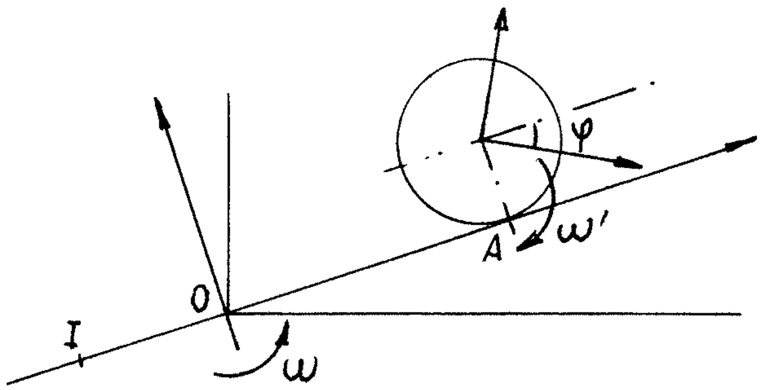
$$\begin{cases} x_I = x = a\ln\tan\frac{\theta}{2} \\ y_I = |\boldsymbol{IA}| = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta} \end{cases}$$

estas son las ecuaciones paramétricas de la base en coordenadas cartesianas.

Eliminando θ, se obtiene la ecuación implícita en coordenadas cartesianas:

$$\boxed{y = a \cosh \frac{x}{a}}$$

Ejercicio nº 23.-



1.- En el movimiento relativo de C respecto de Ox A es el C.I.R., por rodar sin deslizar. El movimiento de arrastre es una rotación alrededor de O con velocidad ω.

Denominamos ω' a la velocidad de rotación de C relativa a Ox (nótese que el sentido tomado como positivo es el opuesto que ω, ver figura). La velocidad de rotación resultante será la suma algebraica de las dos:

$$\Omega = \omega - \omega' = \omega - \frac{\dot{x}}{R}$$

El C.I.R. pedido será el punto de aplicación de la resultante de las dos rotaciones de arrastre (ω) y relativa ($-\omega'$). Suponiendo esté en un punto I situado a una distancia r a la izquierda de O (figura), la condición de velocidad nula en I es:

$$r\omega - (r + x)\frac{\dot{x}}{R} = 0$$

por tanto

$$\boxed{-x_I = r = \frac{x\dot{x}}{\omega R - \dot{x}}} \qquad (1)$$

2.- La ruleta o polar móvil se define en función de unos ejes (x', y') que se mueven con el disco C. Llamando $\varphi = \int \omega' \, dt$ al ángulo girado por estos ejes y proyectando sobre ellos las coordenadas de I:

$$\begin{cases} x'_I = R\operatorname{sen}\varphi - (r+x)\cos\varphi \\ y'_I = -R\cos\varphi - (r+x)\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

sustituyendo r de (1):

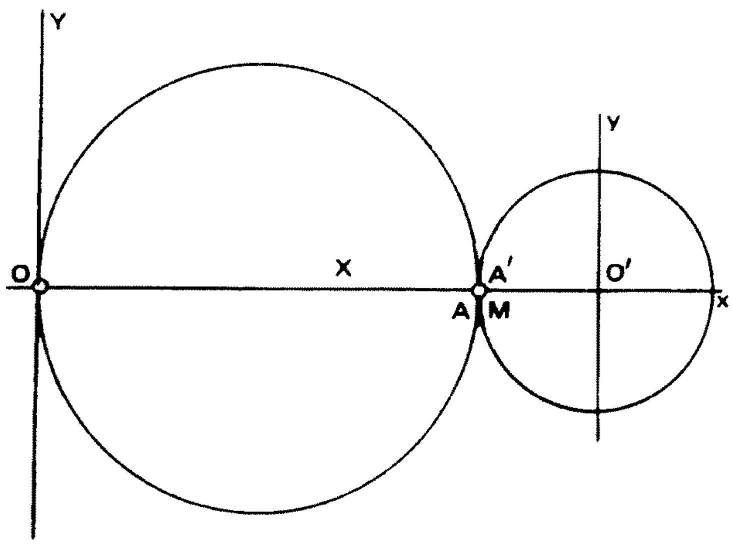
$$\begin{cases} x'_I = R\operatorname{sen}\varphi - \dfrac{\omega R x}{\omega R - \dot{x}}\cos\varphi \\ \\ y'_I = -R\cos\varphi - \dfrac{\omega R x}{\omega R - \dot{x}}\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

Para la base proyectamos sobre los ejes fijos OXY:

$$\begin{cases} X_I = -r\cos\omega t = \dfrac{x\dot{x}}{\dot{x} - \omega R}\cos\omega t \\ \\ Y_I = -r\operatorname{sen}\omega t = \dfrac{x\dot{x}}{\dot{x} - \omega R}\operatorname{sen}\omega t \end{cases}$$

Ejercicio nº 24.-

Denominamos O' al centro del círculo de radio r, A al punto del círculo de radio R que está en M en el instante inicial, y A' al punto correspondiente del otro círculo (ver figura).

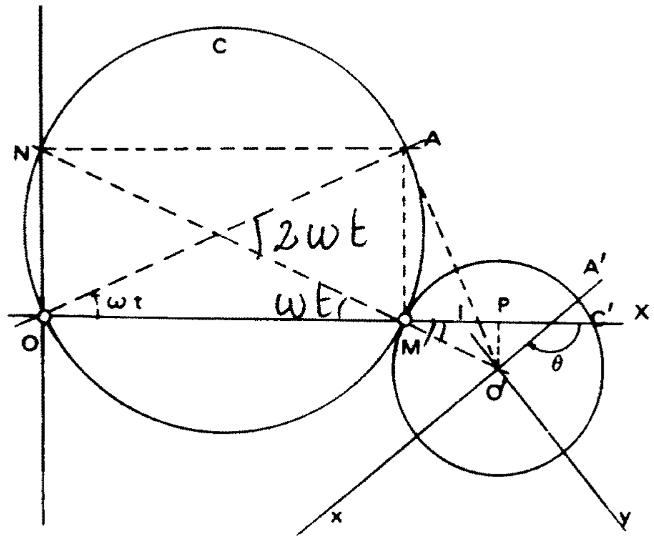


Dibujando una posición genérica cuando el disco de radio R ha girado un ángulo ωt, observamos que el ángulo $\widehat{MO'A'} = 2\omega Rt/r$, dado que el arco

$\widehat{AM}$ es igual al arco $\widehat{A'M}$. El ángulo girado por el segundo círculo es:

$$\theta = -(\omega t + M\widehat{O'}A') = -\frac{2R+r}{r}\omega t$$

donde se ha tomado como positivo para θ el sentido dextrógiro (contrario a las agujas del reloj).



La velocidad angular absoluta es por tanto

$$\dot{\theta} = -\frac{2R+r}{r}\omega \tag{1}$$

Las coordenadas de O' son:

$$\begin{cases} X_{O'} &= (2R+r)\cos\omega t \\ Y_{O'} &= -r\,\mathrm{sen}\,\omega t \end{cases} \tag{2}$$

y derivando,

$$\begin{cases} \dot{X}_{O'} &= -(2R+r)\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ \dot{Y}_{O'} &= -r\omega\cos\omega t \end{cases} \tag{3}$$

1.- Aplicando las expresiones generales, obtenemos las coordenadas del centro instantáneo de rotación I. El lugar geométrico de I en ejes fijos es la *base:*

$$\begin{cases} X_I = X_{O'} - \dfrac{\dot{Y}_{O'}}{\dot{\theta}} = \dfrac{4(R^2+Rr)\cos\omega t}{2R+r} \\ Y_I = Y_{O'} + \dfrac{\dot{X}_{O'}}{\dot{\theta}} = 0 \end{cases}$$

Era razonable esperar que I estuviese situado sobre el eje OX, ya que el movimiento es composición de dos rotaciones, una con centro en O y otra en M.

La base es por tanto el segmento sobre OX tal que

$$|X| \leq \frac{4(R^2 + Rr)}{2R + r}$$

El lugar geométrico de I en ejes móviles es la *ruleta:*

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{\dot{X}_{O'} \operatorname{sen} \theta - \dot{Y}_{O'} \cos \theta}{\dot{\theta}} \\[2ex] y_I = \dfrac{\dot{Y}_{O'} \cos \theta + \dot{Y}_{O'} \operatorname{sen} \theta}{\dot{\theta}} \end{cases}$$

operando resulta

$$\begin{cases} x_I = -\dfrac{r}{2R + r} \left[r \cos \left(\dfrac{2R}{r} \omega t \right) + 2R \operatorname{sen} \left(\dfrac{2R + r}{r} \omega t \right) \operatorname{sen}(\omega t) \right] \\ y_I = \dfrac{r}{2R + r} \left[-r \operatorname{sen} \left(\dfrac{2R}{r} \omega t \right) + 2R \cos \left(\dfrac{2R + r}{r} \omega t \right) \operatorname{sen} \omega t \right] \end{cases}$$

2.- La velocidad angular es la expresada en la ecuación (1).

3.- La trayectoria de O' es una *elipse*, como se deduce de (2):

$$\frac{X_{O'}^2}{(2R + r)^2} + \frac{Y_{O'}^2}{r^2} = 1$$

4.- La aceleración se obtiene derivando (3):

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{O'} &= -\omega^2 (2R + r) \cos \omega t \\ \ddot{Y}_{O'} &= \omega^2 r \operatorname{sen} \omega t \end{aligned}$$

Cuando M está sobre O, $\omega t = \pi/2$. Particularizando,

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{O'} &= 0 \\ \ddot{Y}_{O'} &= \omega^2 r \end{aligned}$$