MECANICA

Practica nº 6 curso 95-96

26. La distancia de un cometa al sol alcanza un valor mínimo $R_T/2$, donde R_T es el radio de la órbita de la tierra, que se supone circular. En el instante en que el cometa se encuentra a esta mínima distancia, se observa que su velocidad es doble que la de la tierra en su movimiento de traslación V_T. Determinar:

1. Si el cometa podrá escapar del sistema solar.
2. Velocidad que tiene cuando corta a la eclíptica, en función de V_T. (Admitiendo que el cometa tiene su órbita en el mismo plano que la eclíptica u órbita de la tierra)
3. Angulo en que la corta.

(Se despreciará el efecto de la tierra sobre el cometa).

27. Un punto P de masa m está sometido a una fuerza central. La velocidad forma siempre un ángulo $\pi/4$ con el radio vector y su módulo es $v = \sqrt{2}/r$. Hallar la ecuación de la trayectoria y el valor de la fuerza central en función de la distancia al polo de atracción.

En el instante inicial el radio vector es $r_0 = a$, y el ángulo polar es $\theta_0 = 0$.

28. El radio de la órbita de Venus es 0.72 veces el de la Tierra (se suponen ambas órbitas circulares y coplanarias). Una nave espacial viaja de la Tierra a Venus siguiendo una órbita elíptica que es tangente a cada una de las órbitas planetarias y es la órbita de viaje más económica (órbita de transferencia). Se pide:

1. Hallar la velocidad relativa de la nave respecto a la Tierra justo después del lanzamiento, y respecto a Venus justo después de llegar a su órbita, despreciando en cada caso la atracción gravitatoria del planeta. (Velocidad orbital terrestre = 30 Km/s).
2. Hallar el tiempo necesario para realizar el viaje en las condiciones anteriores.
3. ¿En que parte de su órbita respecto a la tierra debe estar Venus en el momento del lanzamiento para asegurar que estará en el sitio correcto cuando llegue la nave?.

29. Un proyectil se lanza desde la superficie de la tierra con una determinada velocidad inicial v_0. Despreciando la resistencia de la atmósfera, calcular la velocidad necesaria para que alcance una órbita elíptica de semieje mayor 80000 km. Calcular asimismo la excentricidad de la órbita si la dirección de lanzamiento forma un ángulo de 45° con la vertical. Se puede suponer que la tierra es esférica, con perímetro máximo 40000 km).

30. Un satélite artificial de masa $m = 1000\,\text{kg}$ sigue una órbita elíptica alrededor de la tierra, con semieje mayor $a = 10000\,\text{km}$ y excentricidad $e = 0.01$. En el apogeo le alcanza otro satélite de masa $M = 5000\,\text{kg}$, teniendo la velocidad de ambos cuerpos antes del contacto la misma dirección. El proceso de acoplamiento es instantáneo y ambos satélites quedan perfectamente unidos después de él. Calcular la velocidad relativa necesaria entre ambos satélites para conseguir que la órbita del satélite conjunto resultante sea circular.

Nota: el radio de la tierra es $R = 6\,366\,\text{km}$

⋆

MECANICA

Practica nº 6

curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 26.-

1.- No nos dan las masas, ni de la tierra ni del cometa, ni la constante de atracción solar (llamaremos así a $K = GM_{\rm sol}$). Sin embargo, la velocidad y el radio de la órbita de la tierra se pueden relacionar igualando la fuerza de atracción del sol a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta de la órbita circular:

$$\frac{KM_T}{R_T^2} = M_T\frac{V_T^2}{R_T} \quad \Rightarrow \quad K = V_T^2 R_T$$

Para clasificar la órbita del cometa calculamos su energía:

$$E = T + V = \frac{1}{2}M_c(2V_T)^2 - K\frac{M_c}{(R_T/2)} = 0;$$

luego la órbita es parabólica y el cometa escapa (justo) del sistema solar.

2.- Aplicando la fórmula de la energía al punto de intersección de ambas órbitas:

$$\frac{1}{2}M_cV_c^2 - \frac{KM_c}{R_T} = \frac{1}{2}M_cV_c^2 - M_cV_T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_c = V_T\sqrt{2}$$

3.- La constantes de las áreas de la tierra y del cometa son iguales. En el punto de intersección, las distancias de la tierra y el cometa al sol son iguales, luego el ángulo de las dos velocidades que es el de las tangentes a las órbitas debe ser $(\pi/4)$ para que la relación de las velocidades sea $\sqrt{2}$.

Ejercicio nº 27.-

La constante de las áreas vale

$$C = 2\frac{dS}{dt} = 2\frac{\frac{1}{2}rv\cos(\pi/4)\,dt}{dt} = r\frac{\sqrt{2}}{r}\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

Empleando coordenadas polares podemos escribir por tanto

$$r^2\dot{\theta} = 1.$$

Además $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Sustituyendo valores y teniendo en cuenta que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{1}{r^2}$$

queda

$$\frac{2}{r^2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dr}{r} = d\theta$$

integrando y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, la ecuación de la trayectoria resulta:

$$r = ae^{\theta}.$$

Aplicando la fórmula de Binet y operando las derivadas que resultan se obtiene directamente el valor de la fuerza:

$$F(r) = \frac{-mC^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{-2m}{r^3}$$

(El signo negativo indica que se dirige hacia el centro).

Ejercicio nº 28.-

1.- Al suponer que las órbitas de Venus y la Tierra son circulares, las velocidades respectivas son

$$v_v^2 = \frac{GM_{sol}}{R_v}; \quad v_t^2 = \frac{GM_{sol}}{R_t}$$

dividiendo ambas expresiones y empleando el dato $R_v/R_t = 0.72$ resulta

$$v_v^2 = v_t^2\frac{R_t}{R_v} \qquad \Rightarrow \qquad v_v = 35.35\,\mathrm{km/s}$$

La órbita de transferencia es una elipse con semieje mayor

$$a = \frac{1}{2}(R_t + R_v);$$

en el instante 1 en que parte de la órbita terrestre la velocidad de la nave es

$$v_1^2 = GM_{sol}\left(\frac{2}{R_t} - \frac{1}{a}\right) = GM_{sol}\frac{2R_v}{R_t(R_t + R_v)} = v_t^2\frac{2R_v}{R_t + R_v}$$

por lo que la diferencia de velocidad con la tierra es

$$v_1 - v_t = v_t\left(\sqrt{\frac{2R_v}{R_t + R_v}} - 1\right) = -2.55\,\mathrm{km/s}$$

es decir la nave debe ralentizarse respecto de la velocidad de la órbita terrestre.

Por otra parte, en el instante 2 en que llega a la órbita de Venus

$$v_2^2 = GM_{sol}\left(\frac{2}{R_v} - \frac{1}{a}\right) = GM_{sol}\frac{2R_t}{R_v(R_t + R_v)} = v_v^2\frac{2R_t}{R_t + R_v}$$

por lo que

$$v_2 - v_v = v_v\left(\sqrt{\frac{2R_t}{R_t + R_v}} - 1\right) = 2.7689\,\mathrm{km/s}$$

2.- El periodo orbital de la nave es

$$T_n^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_{sol}}$$

Por otra parte, conocemos el valor del de la Tierra que es un año sidéreo (aproximadamente 365.25 días):

$$T_t^2 = \frac{4\pi^2 R_t^3}{GM_{sol}}$$

entre ambas ecuaciones podemos calcular el tiempo pedido que es la mitad del periodo orbital de la nave:

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2}T_t\left(\frac{a}{R_t}\right)^{3/2} = 0.3988\,\text{años} \;= 145.65\ \text{días}$$

3.- Basta con calcular el ángulo recorrido por Venus en su órbita circular durante el tiempo calculado arriba. El periodo orbital de Venus es

$$T_v^2 = \frac{4\pi^2 R_v^2}{GM_{sol}}$$

por lo que el ángulo recorrido es

$$\phi = 2\pi\frac{1}{2}\frac{T_n}{T_v} = \pi\left(\frac{a}{R_t R_v}\right)^{3/2} = 4.1011\ \mathrm{rad} = 234.975°$$

Ejercicio nº 29.-

El radio de la tierra es $R = 40\,000/2\pi = 6\,366\,\mathrm{km}$. La velocidad necesaria se obtiene de aplicar directamente la fórmula que relaciona la energía con el semieje de la elipse,

$$v_0^2 = \underbrace{GM}_{gR^2}\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 10.951\,\mathrm{km/s}}$$

Esta velocidad es independiente de la dirección de lanzamiento, que sólo influirá para la excentricidad de la elipse.

La velocidad obtenida es la velocidad absoluta del proyectil, medida respecto de la esfera terrestre en reposo. El enunciado no proporciona ningún dato sobre la posición inicial del cuerpo sobre la tierra, entendiéndose que el efecto de la velocidad de arrastre debida a la propia rotación de la tierra es pequeño (ésta sería máxima en el ecuador, con valor $v' = 40\,000/86\,400 = 0.463\,\mathrm{km/s}$).

Si se conoce la inclinación del lanzamiento (45°), se puede obtener la constante de las áreas,

$$C = R(R\dot{\varphi}) = R\frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

y por tanto el parámetro p de la cónica,

$$p = \frac{C^2}{GM} = \frac{C^2}{gR^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

obteniendo finalmente la excentricidad pedida:

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{v_0^2}{2ga} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 0.961}$$

Ejercicio nº 30.-

En el instante de la unión, llamamos v_1 a la velocidad de m, v_2 a la velocidad de M, y v_3 la de la nave conjunta resultante $(M+m)$.

Relacionamos la velocidad con la posición mediante la fórmula

$$v^2 = GM_{tierra}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

En el apogeo es $r = a(1+e)$, por lo que

$$(v_1)^2 = \underbrace{GM_{tierra}}_{gR^2}\left(\frac{2}{a(1+e)}-\frac{1}{a}\right) = 9.81\times(6.366\times10^6)^2\left(\frac{2}{10.1\times10^6}-\frac{1}{10.\times10^6}\right)$$

de donde se obtiene

$$v_1 = 6242.5\,\mathrm{m/s}$$

La nave conjunta ha de seguir una órbita circular, de radio $a(1+e)$, por lo que su velocidad la hallamos mediante

$$(v_3)^2 = \frac{GM_{tierra}}{a(1+e)} = \frac{9.81\times(6.366\times10^6)^2}{10.1\times10^6} \quad\Rightarrow\quad v_3 = 6273.9\,\mathrm{m/s}.$$

Imponiendo la conservación de la cantidad de movimiento en la unión,

$$mv_1 + Mv_2 = (M+m)v_3 \quad\Rightarrow\quad v_2 = \frac{(M+m)v_3 - mv_1}{M} = 6280.2\,\mathrm{m/s}$$

por lo que la velocidad relativa ha de ser

$$v' = v_2 - v_1 = 37.7\,\mathrm{m/s}.$$