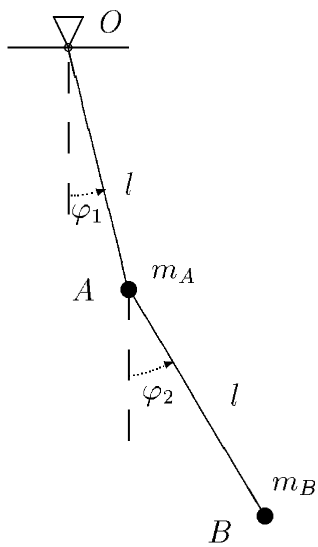
MECANICA

Practica nº 8 curso 95-96

36. Un conjunto de p puntos materiales está obligado a permanecer en un plano liso horizontal. Otro conjunto de q puntos materiales está obligado a permanecer en otro plano liso horizontal situado a una distancia h bajo el anterior. Entre cada dos puntos (cualesquiera que sean) existe una fuerza de atracción proporcional (de la misma constante k) a sus masas y a la distancia que los separa. Estudiar el movimiento de los puntos, analizando la influencia que tendría el hecho de que los planos paralelos formasen un ángulo θ con la horizontal. En el caso $p = q = 1$ encontrar las condiciones iniciales para que las trayectorias sean circunferencias (siendo los planos horizontales).

37. El péndulo doble de la figura está formado por las masas m_A y m_B, unidas entre sí y a un punto fijo O mediante barras rígidas sin masa de longitud l. Obtener las ecuaciones de la dinámica a partir del principio de D'Alembert, respondiendo a las siguientes cuestiones:

1. Obtener los desplazamientos virtuales $\delta \boldsymbol{r}_A$, $\delta \boldsymbol{r}_B$ en función de $\delta\varphi_1$ y $\delta\varphi_2$.
2. Obtener las aceleraciones de A y B en función de (φ_1, φ_2) y sus derivadas.
3. Expresar el trabajo virtual de las fuerzas activas (pesos).
4. Expresar el trabajo virtual de las fuerzas de inercia.
5. Plantear las ecuaciones de la dinámica, en función de (φ_1, φ_2), mediante la aplicación del principio de D'Alembert.
6. Calcular las reacciones externas (en O) e internas (tensiones en barras), en función de (φ_1, φ_2) y sus derivadas.
7. Obtener las ecuaciones de la dinámica mediante la aplicación de los teoremas generales de Newton Euler y comprobar que coinciden con las obtenidas mediante D'Alembert.



38. Dos masas iguales A y B unidas por un hilo sin masa e inextensible de longitud L pueden deslizar sin rozamiento sobre dos varillas ortogonales OX y OY situadas en un plano vertical. El conjunto gira alrededor del eje OY con velocidad angular constante ω. Inicalmente $\theta_0 = 60°$ y las partículas están en reposo respecto a las varillas. Se pide:

1. Calcular el intervalo de variación de ω (constante) para el cual A asciende para no llegar a O.
2. Supuesto que el valor de ω es mayor que el extremo superior del intervalo obtenido en el apartado anterior, hallar $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, la tensión y las reacciones de las varillas al llegar A a O.

39. Una partícula P de masa m se mueve sobre una mesa horizontal lisa y fija. Se encuentra atada al extremo de un hilo inextensible, de masa despreciable y longitud $2b$, que pasa a través de un pequeño agujero liso Q de la mesa y cuelga libremente, llevando atada, en su otro extremo, otra partícula igual A. En el instante inicial P dista b de Q y tiene una velocidad v_0 normal al hilo, mientras A está sin velocidad, en la vertical de Q. Se pide:

1. Calcular los valores máximos y mínimos que alcanzarán durante el movimiento:
   (a) la distancia QP
   (b) las velocidades de ambas partículas P y A
   (c) la tensión T del hilo
2. ¿Qué influencia tendría en los resultados obtenidos que la mesa, en lugar de ser fija, girase con velocidad angular constante alrededor de la vertical que pasa por Q?.

40. Consideremos un sistema material situado en el plano horizontal, formado por un semianillo circular homogéneo, de masa m y radio r, con un extremo fijo O y por una masa puntual m igual a la del semianillo. No existe ningún rozamiento. Las condiciones iniciales son:

a. Semianillo en reposo.
b. El punto en el extremo fijo del semianillo.
c. La velocidad del punto material es v_0.

El punto está ligado bilateralmente al semianillo, pero puede abandonarlo por el extremo libre. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema.
2. Velocidades del semianillo y de la masa puntual, en el instante en que ésta abandona el semianillo.
3. Reacción que el semianillo ejerce sobre la masa puntual, en una posición genérica.

MECANICA

Practica nº 8 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio nº 36.-

Sea el caso general de un conjunto de masas materiales cualesquiera m_i situadas en puntos P_i, que actúan entre sí mediante atracciones proporcionales a masas y distancias como indica el enunciado. La resultante de las fuerzas sobre una cualquiera de las masas, de valor m y situada en un punto Q, es:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} k m_i m \, \boldsymbol{QP}_i = mk \sum m_i \, \boldsymbol{QP}_i$$

El sumatorio obtenido define la posición del centro de masas (G) del conjunto, relativo a Q:

$$\sum m_i \, \boldsymbol{QP}_i = \left(\sum m_i\right) \, \boldsymbol{QG}$$

por tanto, llamando $M = \sum m_i$, resulta

$$\boxed{\boldsymbol{F} = mkM \, \boldsymbol{QG}}$$

Esta es la fuerza total sobre una partícula cualquiera. Su trayectoria referida a la referencia S.C.M. será plana al tratarse de una fuerza central. Será una elipse (si k es positiva) ó una hipérbola (si k es negativa).

Admitiendo como indica el enunciado que las masas están dispuestas en dos planos horizontales, el centro de masas G del conjunto total de partículas $(p+q)$ deberá permanecer en un plano paralelo a los que soportan a ambos conjuntos, y dentro de él se moverá rectilínea y uniformemente, ya que este movimiento no se ve afectado por las reacciones de los planos lisos sobre las partículas, por ser constantemente normales al plano del movimiento. Desembocamos en el caso anteriormente estudiado, por lo que las partículas del conjunto p describen elipses con centro en G', proyección de G sobre su plano. Análogamente sucede para el sistema q.

Si los planos están inclinados, la trayectoria de G en su plano será parabólica y las trayectorias de los puntos respecto de la referencia G será la misma que antes (elipses) por el mismo razonamiento antes dicho.

En el caso $p = q = 1$ para que las trayectorias sean circunferencias, el centro de estas deberá ser la proyección de G y las condiciones iniciales las obtenemos sin más que igualar la fuerza $kmMr$ a la fuerza centrípeta mv^2/r con lo que resulta $v = r\sqrt{kM}$ que es la relación que deben cumplir la distancia r y la velocidad v que, por supuesto, debe ir dirigida normalmente al radio r.

Ejercicio nº 37.-

1.- El sistema tiene dos grados de libertad, es decir, puede ser descrito de manera unívoca por los dos ángulos (φ_1, φ_2), que a su vez admiten variaciones arbitrarias $(\delta\varphi_1, \delta\varphi_2)$ manteniendo compatibilidad con los enlaces. El desplazamiento virtual de A es una rotación alrededor de O, mientras que el de B es una rotación alrededor de A más el arrastre debido al movimiento de A:

$$\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{r}_A &= \delta\varphi_1\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{OA} \\
&= l\,\delta\varphi_1(\cos\varphi_1\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi_1\boldsymbol{j}) && (1)\\
\delta \boldsymbol{r}_B &= \delta\boldsymbol{r}_A+\delta\varphi_2\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{AB} \\
&= l(\cos\varphi_1\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi_1\boldsymbol{j})\delta\varphi_1+l(\cos\varphi_2\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi_2\boldsymbol{j})\delta\varphi_2 && (2)
\end{aligned}$$

2.- Para obtener las aceleraciones se aplican las expresiones conocidas de cinemática del sólido, teniendo en cuenta (al igual que en el punto anterior) que para B se debe añadir el arrastre de A:

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_A &= \ddot\varphi_1\,\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{OA}-\dot\varphi_1^2\boldsymbol{OA} \\
&= \ddot\varphi_1 l(\cos\varphi_1\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi_1\boldsymbol{j})-l\dot\varphi_1^2(\operatorname{sen}\varphi_1\boldsymbol{i}-\cos\varphi_1\boldsymbol{j}) && (3)\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_B &= \ddot{\boldsymbol{r}}_A+\ddot\varphi_2\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{AB}-\dot\varphi_2^2\boldsymbol{AB} \\
&= \ddot\varphi_1 l(\cos\varphi_1\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi_1\boldsymbol{j})-l\dot\varphi_1^2(\operatorname{sen}\varphi_1\boldsymbol{i}-\cos\varphi_1\boldsymbol{j})+ \\
&\quad\ \ddot\varphi_2 l(\cos\varphi_2\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\varphi_2\boldsymbol{j})-l\dot\varphi_2^2(\operatorname{sen}\varphi_2\boldsymbol{i}-\cos\varphi_2\boldsymbol{j}) && (4)
\end{aligned}$$

3.- Basta multiplicar escalarmente los pesos $(-m_A g\boldsymbol{k}, -m_B g\boldsymbol{k})$ por los desplazamientos virtuales de (1), (2):

$$\delta W = -(m_A+m_B)gl\operatorname{sen}\varphi_1\delta\varphi_1 - m_B gl\operatorname{sen}\varphi_2\,\delta\varphi_2 \qquad (5)$$

4.- Realizamos el producto escalar de las expresiones obtenidas en (1), (2), (3) y (4):

$$\begin{aligned}
&m_A\ddot{\boldsymbol{r}}_A\cdot\delta\boldsymbol{r}_A+m_B\ddot{\boldsymbol{r}}_B\cdot\delta\boldsymbol{r}_B = \\
&\quad m_A l^2\varphi_1\delta\varphi_1+m_B l^2[\ddot\varphi_1+\ddot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\dot\varphi_2^2\operatorname{sen}(\varphi_2-\varphi_1)]\delta\varphi_1 \\
&\quad +m_B l^2[\ddot\varphi_2+\ddot\varphi_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\dot\varphi_1^2\operatorname{sen}(\varphi_2-\varphi_1)]\delta\varphi_2 \qquad (6)
\end{aligned}$$

5.- El principio de D'Alembert establece la igualdad de las expresiones obtenidas en (5) y (6). Agrupando los coeficientes de $\delta\varphi_1$ y $\delta\varphi_2$, resulta

$$\begin{aligned}
&\{-(m_A+m_B)gl\operatorname{sen}\varphi_1-[m_A l^2\ddot\varphi_1+m_B l^2(\ddot\varphi_1+\ddot\varphi_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)-\dot\varphi_2^2\operatorname{sen}(\varphi_2-\varphi_1)]\}\delta\varphi_1 \\
&\qquad +\{-m_B gl\operatorname{sen}\varphi_2-m_B l^2[\ddot\varphi_2+\ddot\varphi_1\cos(\varphi_2-\varphi_1)+\dot\varphi_1^2\operatorname{sen}(\varphi_2-\varphi_1)]\}\delta\varphi_2=0
\end{aligned}$$

Esta igualdad se verifica $\forall\{\delta\varphi_1, \delta\varphi_2\}$. Tomando $\delta\varphi_1 = 1, \delta\varphi_2 = 0$:

$$(m_A + m_B)gl \operatorname{sen}\varphi_1 + (m_A + m_B)l^2\ddot{\varphi}_1 + \\ m_B l^2[\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_2^2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)] = 0, \tag{7}$$

y tomando $\delta\varphi_1 = 0, \delta\varphi_2 = 1$:

$$m_B gl \operatorname{sen}\varphi_2 + m_B l^2[\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_1^2 \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)] = 0 \tag{8}$$

6.- Al tratarse de masas puntuales, la reacción interna o tensión de cada barra debe llevar la dirección de la misma (se deja como ejercicio al alumno justificar esta afirmación). Expresamos la ecuación de balance de cantidad de movimiento en dirección x para el sistema conjunto:

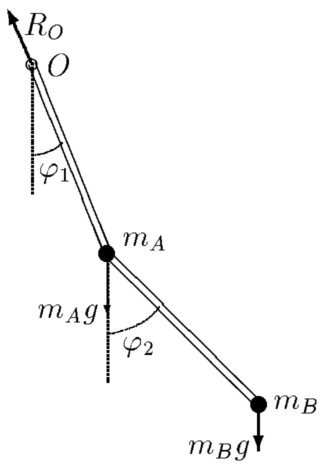


Diagrama de fuerzas sistema conjunto

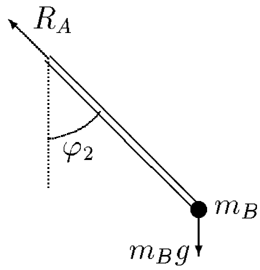


Diagrama de fuerzas subsistema m_B

$$\begin{aligned} -R_O \operatorname{sen}\varphi_1 &= m_A(\ddot{\boldsymbol{r}}_A \cdot \boldsymbol{i}) + m_B(\ddot{\boldsymbol{r}}_B \cdot \boldsymbol{i}) \\ &= m_A(\ddot{\varphi}_1 l \cos\varphi_1 - l\varphi_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1) \\ &\quad + m_B(l\ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - l\dot{\varphi}_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1 + l\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2) \end{aligned}$$

Expresamos ahora el mismo balance pero para el subsistema de m_B:

$$\begin{aligned} -R_A \operatorname{sen}\varphi_2 &= m_B(\ddot{\boldsymbol{r}}_B \cdot \boldsymbol{i}) \\ &= m_B(l\ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - l\dot{\varphi}_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1 + l\ddot{\varphi}_2 \cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2) \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones anteriores permiten calcular la reacción externa (R_O) y las internas de las barras (R_A en la barra AB; en la barra OA vale R_O).

7.- En este punto se pide obtener las ecuaciones dinámicas por aplicación de los teoremas de Newton-Euler. Al tratarse de un sistema no rígido, encontramos que necesariamente entran en las expresiones resultantes las reacciones (R_O ó R_A) lo cual complica el pleanteamiento, ya que al aumentar el número de incógnitas (los g.d.l. eran φ_1 y φ_2) obliga a aumentar el número de ecuaciones. Podemos resolver este apartado planteando las siguientes ecuaciones de balance:

a. $\sum M_O = d/dt(H_o)$ en sistema conjunto.

b. $\sum F_x = \sum m_i \ddot{x}_i$ en subsistema m_B.

c. $\sum F_y = \sum m_i \ddot{y}_i$ en subsistema m_B.

Se obtienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas: φ_1, φ_2, y R_A. Eliminando R_A deben obtenerse finalmente un conjunto de 2 ecuaciones diferenciales en (φ_1, φ_2) equivalentes a las (7) y (8) obtenidas antes por D'Alembert.

Desarrollando las ecuaciones indicadas:

a. Balance del momento cinético conjunto

$$\sum M_O = -m_A g l \operatorname{sen}\varphi_1 - m_B g (l \operatorname{sen}\varphi_1 + l \operatorname{sen}\varphi_2)$$

$$H_O = m_A l \dot{\varphi}_1^2 + m_B (\boldsymbol{OB} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_B) \cdot \boldsymbol{k}$$

haciendo operaciones y desarrollando las expresiones para $\boldsymbol{OB}$ y $\dot{\boldsymbol{r}}_B$,

$$H_O = m_A l^2 \dot{\varphi}_1 + m_B l^2 [\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)\cos(\varphi_2 - \varphi_1)]$$

derivando se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} & m_A g l \operatorname{sen}\varphi_1 - m_B g l (\operatorname{sen}\varphi_1 + \operatorname{sen}\varphi_2) = \\ & -m_A l^2 \ddot{\varphi}_1 + m_B l^2 [\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ & -(\dot{\varphi}_2^2 - \dot{\varphi}_1^2)\operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)] \end{aligned} \qquad (9)$$

ecuación que es equivalente a la suma de (7) + (8).

b. Balance de cantidad de movimiento en dirección x de m_B. Se obtiene fácilmente la expresión:

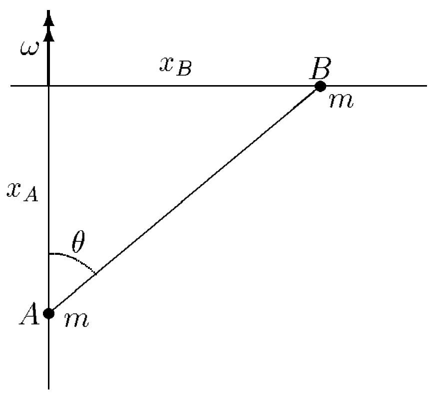
$$-R_A \operatorname{sen}\varphi_2 = m_B(\ddot{\varphi}_1 l \cos\varphi_1 + \ddot{\varphi}_2 l \cos\varphi_2 - l\dot{\varphi}_1^2 \operatorname{sen}\varphi_1 - l\dot{\varphi}_2^2 \operatorname{sen}\varphi_2) \quad (10)$$

c. Lo mismo pero en dirección y. Análogamente se obtiene

$$-m_B g + R_A \cos\varphi_2 = m_B[l\ddot{\varphi}_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + l\ddot{\varphi}_2 \operatorname{sen}\varphi_2 + l\dot{\varphi}_1^2 \cos\varphi_1 + l\dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2] \quad (11)$$

y eliminando R_A entre (10) y (11) se obtiene una ecuación idéntica a (8).

Ejercicio nº 38.-



1.- Para que ascienda A, equivale a que B vaya hacia la derecha. Estudiemos para qué valor de ω_l se mantiene en "equilibrio" dinámico el sistema (entrecomillamos la expresión anterior ya que no se trata de un equilibrio real, es decir sin movimiento, sino de un equilibrio relativo a unos ejes que giran, que se consigue gracias a la fuerza centrífuga).

Equilibrio de la masa A, $\Sigma F_v = 0$:

$$T\cos 60° - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2mg}$$

Equilibrio de la masa B, $\Sigma F_u = ma_u$:

$$T\cos 30° = m\omega_l^2 l \operatorname{sen} 60° \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = m\omega_l^2 l}$$

El equilibrio se consigue para $\omega_l^2 = 2g/l$. Por tanto:

1. Si $\omega < \sqrt{2g/l}$ desciende A.
2. Si $\omega = \omega_l = \sqrt{2g/l}$ queda estacionaria la masa A.
3. Si $\omega > \sqrt{2g/l}$ asciende A.

Estudiemos ahora la condición de que A llegue al punto O sin velocidad. Podemos calcular una integral primera de la energía, correspondiente al movimiento relativo. En efecto, la fuerza de coriolis $\boldsymbol{F}_{cor} = -2m\omega v_B(\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{i})$ no realiza trabajo para el movimiento relativo al ser perpendicular al plano. La fuerza de arrastre (centrífuga) proviene de un potencial, que se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{arr} &= m\omega^2 x_B\, \boldsymbol{i} \\ F_{arr} &= -\frac{\partial V_{arr}}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad V_{arr} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_B^2 \end{aligned}$$

La expresión ($T_{rel} + V + V_{arr} = cte$) es una constante del movimiento, aunque no coincide con la energía mecánica. Sería erróneo afirmar que ($T + V = cte$), ya que es necesario ralizar un trabajo sobre el sistema para mantener la rotación ω.

Particularizando entre el punto inicial ($\theta = 60°$) y $\theta = \pi/2$, sabiendo que en esta posición la velocidad de B se anula, se obtiene:

$$(\frac{1}{2}mv_A^2 + mg\frac{l}{2}) + \frac{1}{2}m\left[\omega^2\left(l\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] - \frac{1}{2}m\omega^2l^2 = 0$$

De donde despejando:

$$v_A^2 = -gl + \frac{1}{4}\omega^2l^2$$

Si A llega sin velocidad

$$v_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{4g}{l}$$

Por tanto:

- Si $\sqrt{\frac{2g}{l}} < \omega < 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ asciende pero no llega O.
- Si $\omega > 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ pasa por encima de O.

2.- Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ las velocidades son

$$v_A = \sqrt{\omega^2l^2/4 - gl}, \quad v_B = 0$$

$$\dot{\theta} = \frac{v_A}{l} = \sqrt{\omega^2/4 - g/l}$$

Aplicaremos la ecuación dinámica para obtener la tensión. En primer lugar, calculamos la aceleración de B.

$$v_B = v_A\cot\theta \quad \Rightarrow \quad a_B = a_A\cot\theta - \frac{v_A}{\operatorname{sen}^2\theta}\dot{\theta}$$

Derivando y particularizando para $\theta = \pi/2$,

$$a_B = -\sqrt{\omega^2l^2/4 - gl}\sqrt{\omega^2/4 - g/l} = g - \frac{\omega^2 l}{4}$$

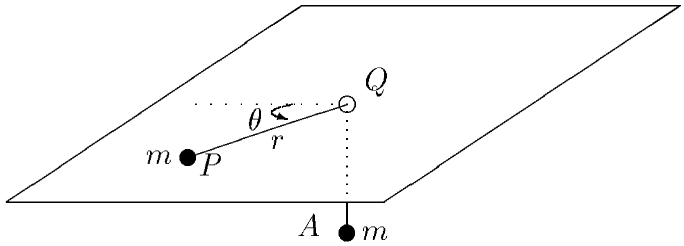
La ecuación es por tanto

$$-T\operatorname{sen}\theta = m(a_B - x_B\omega^2)$$

y particularizando para los valores $x_B = l$ y a_B calculado antes,

$$-T + m\omega^2l = m\left(g - \frac{\omega^2l}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{5}{4}m\omega^2l - mg}$$

Ejercicio nº 39.-



1.- Sea T la tensión del hilo. Para la partícula P podemos escribir la ecuación de la dinámica en dirección radial:

$$-T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

Por otra parte, para el movimiento vertical de la partícula A

$$T - mg = m\ddot{r} \quad \Rightarrow \quad T = m(g + \ddot{r}) \tag{1}$$

Igualando tenemos la ecuación diferencial siguiente:

$$-m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m(g + \ddot{r}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{2\ddot{r} + g = r\dot{\theta}^2} \tag{2}$$

La fuerza sobre P es central, por lo que se cumple la constancia del momento cinético respecto de Q, por tanto:

$$v_0 b = (r\dot{\theta})r \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{v_0 b}{r^2} \tag{3}$$

y sustituyendo en (2),

$$2\ddot{r} + g = \frac{v_0^2 b^2}{r^3} \tag{4}$$

1.a Los extremos de $QP = r$ los obtenemos haciendo $\dot{r} = 0$. Las condiciones iniciales dadas definen $\dot{r}_0 = 0$ (velocidad normal al hilo), por lo que uno de los extremos será precisamente $r_1 = b$.

Para hallar los demás extremos expresamos la constancia de la energía del sistema:

$$\frac{1}{2}m\overbrace{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)}^{v_P^2} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgb \tag{5}$$

simplificando y eliminando θ,

$$2\dot{r}^2 + \frac{v_0^2 b^2}{r^2} + 2gr = v_0^2 + 2gb;$$

hacemos $\dot{r} = 0$ y quitamos la raíz $r_1 = b$:

$$2gr^2 - v_0^2 r - v_0^2 b = 0 \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 8gbv_0^2}}{4g}, \tag{6}$$

expresión que define el otro extremo de r. Sólo se considera el signo positivo de la raíz, ya que para el negativo sería $r < 0$.

En principio no se sabe cuál de los dos extremos será el inferior, si $r_1 = b$ ó r_2, dependiendo del valor de v_0. Podemos observar que:

- Existe un valor de v_0 para el cual ambos extremos coinciden, que se obtiene haciendo $r_2 = b$ en (6):

  $$v_0^2 = gb$$

  de hecho, con esta velocidad inicial P permanecería en movimiento circular alrededor del agujero y A inmóvil.

- Existe un valor máximo de v_0 para que A no salga del agujero hacia arriba; haciendo $r_2 = 2b$ en (6):

  $$v_0^2 = \frac{8}{3} gb$$

- Basta con que sea $v_0 > 0$ para que P no caiga por el agujero de la mesa hacia abajo; siempre que sea $v_0 \neq 0$ por la conservación del movimiento cinético P no puede pasar por el agujero (otra cosa sería si $v_0 = 0$).

1.b Para obtener los extremos de las velocidades derivamos su módulo, es decir, el cuadrado de la velocidad:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(v_A^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}^2\right) = 2\dot{r}\ddot{r}$$

pudiendo ser

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 & \text{extremo absoluto (para } r_1 \text{ y } r_2\text{)} \\ \ddot{r} = 0 & \end{cases}$$

Entrando con $\ddot{r} = 0$ en (4), la posición para el otro extremo de v_A resulta

$$r^3 = \frac{v_0^2 b^2}{g} \quad \Rightarrow \quad r_3 = \left(\frac{v_0^2 b^2}{g}\right)^{1/3}$$

La velocidad de la partícula P se obtiene aplicando (5):

$$v_P^2 = v_0^2 + 2g(b - r) - \dot{r}^2$$

derivando para obtener los extremos

$$0 = \frac{d}{dt}\left(v_P^2\right) = -2g\dot{r} - 2\dot{r}\ddot{r} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = 0 \\ \ddot{r} = -g \end{array} \right.$$

La segunda solución ($\ddot{r} = -g$) conduce a una posición sin sentido físico, lo que se comprueba al sustituir en (4):

$$-2g + g = \frac{v_0^2 b^2}{r^3}$$

que obligaría a $r < 0$. La solución $\dot{r} = 0$ conduce a las mismas posiciones r_1 y r_2 obtenidas antes.

1.c La tensión del hilo se deduce directamente de la ecuación (1), eliminando el valor de $\ddot{r}$ que se deduce de (4). Resulta:

$$T = \frac{m}{2}\left(g + \frac{v_0^2 b^2}{r^3}\right)$$

Considerando que $r > 0$, los máximos/mínimos de T corresponderán con los mínimos/máximos de r:

- T_{max} corresponde a r_{min}
- T_{min} corresponde a r_{max}

Puntualizamos que a priori no puede saberse cuál de los extremos (r_1, r_2) es máximo o mínimo, dependiendo del valor de v_0 (ver discusión en punto 1.a).

2.- No tendría ninguna influencia en los resultados.