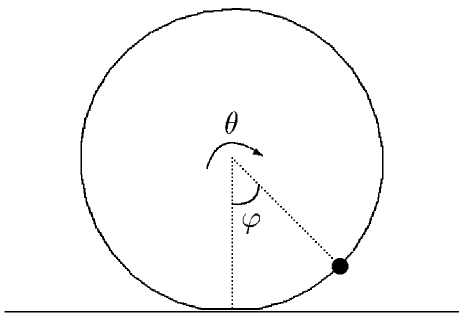
MECANICA

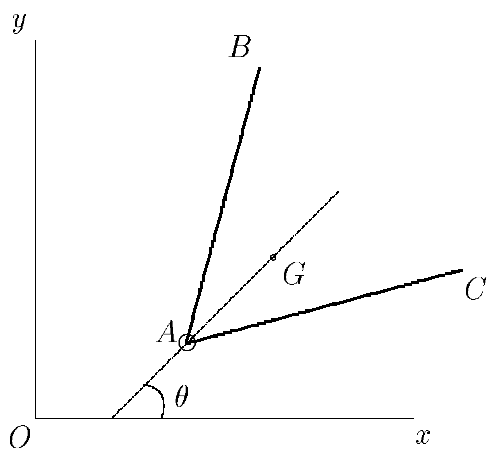
Practica nº 9 — curso 95-96

41. Un aro circular de radio a, homogéneo y de masa m rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Sobre el aro desliza sin rozamiento y con ligadura bilateral una partícula de masa $2m$. Inicialmente se dispone el sistema de manera que la partícula está en el punto más bajo del aro, con velocidad v_0 y el aro en reposo. Se pide:



1. Energía cinética del sistema.
2. Energía potencial del sistema.
3. Ecuación de Lagrange correspondiente al ángulo θ y comprobar que esta coordenada es cíclica.
4. Ecuación de la energía del sistema.
5. Integrar totalmente la ecuación diferencial obtenida en el apartado 3.
6. Eliminar la coordenada cíclica de las ecuaciones del movimiento y dejar el cálculo de φ reducido a una cuadratura.
7. Plantear la ecuación que determina el valor de la reacción aro-partícula en función de φ y sus derivadas.

42. Un sistema material está formado por dos varillas rectilíneas homogéneas iguales AB y AC articuladas en su extremo común A. Cada varilla tiene masa m y longitud l y el sistema completo se ve obligado a moverse sin rozamiento sobre un plano horizontal al cual está ligado un sistema de referencia ortogonal Oxy. La posición del sistema queda determinada por los cuatro parámetros que se definen a continuación:

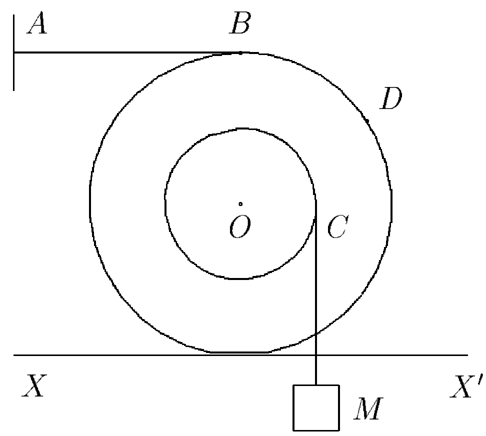


1. Las coordenadas x, y del centro de masas G del sistema.

2. El ángulo θ que el segmento AG forma con el sentido positivo del eje Ox
3. El ángulo $\widehat{BAC}$ que forman ambas varillas

Se pide estudiar el movimiento del sistema correspondiente a condiciones iniciales arbitrarias.

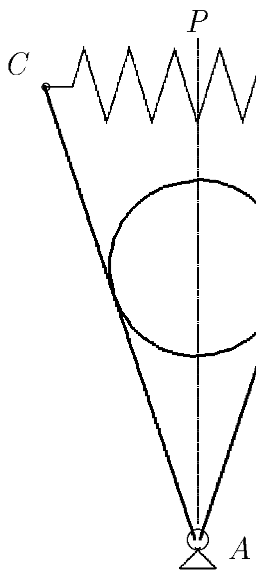
43. Un disco pesado de centro O, radio R y masa $2m$ se mueve en un plano vertical, apoyandose sobre una recta lisa XX' pudiendo rodar y delizar libremente. Enrollada en la periferia del disco hay una goma ABD de constante elástica k y longitud natural cero, que se une al punto fijo A. Finalmente, el disco lleva un resalto circular de radio $R/2$ en el que hay enrollado un hilo inextensible del que cuelga un punto pesado M de masa m. Se supone que existe un sistema de guiado no dibujado en la figura que mantiene al hilo CM constantemente vertical.



Despreciando la influencia del resalto en el momento de inercia del disco, se pide:

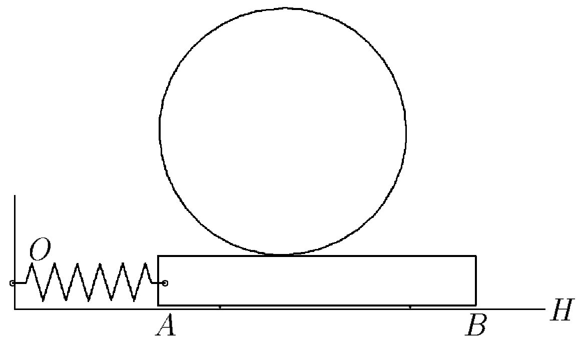
1. Energía cinética del sistema.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Integrar las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior en el caso en que el sistema parta del reposo estando O a una distancia R de la vertical que pasa por A y el punto D en la vertical que pasa por O.
4. Tensión del hilo CM en función del tiempo.

44. El sistema material de la figura, contenido en un plano horizontal, esta constituido por dos varillas homogéneas iguales de longitud a y masa $3m/32$ articuladas por un extremo en un punto fijo A del plano. Un muelle de longitud natural cero y constante k une los extremos B y C de las varillas, mientras que un disco homogéneo de radio $a/4$ y masa m se sitúa entre las dos varillas como se indica en la figura. El centro del disco está obligado a recorrer la recta AP del plano que es fija y además al disco le está impedido girar. El punto fijo A atrae a cada partícula elemental de masa del disco con una fuerza proporcional al producto de la masa del elemento por la distancia. La constante de proporcionalidad es $4k/m$. Se pide:



1. Calcular la energía cinética del sistema.
2. Determinar el potencial de las fuerzas aplicadas.
3. Ecuación diferencial del movimiento
4. Determinar la reacción entre el disco y la varilla.

45. El sistema material de la figura, situado en un plano vertical, está constituido por una varilla rectilínea AB, homogénea y pesada, de masa m y longitud $4a/3$ que desliza sin rozamiento sobre la recta horizontal H; por el muelle OA, de longitud natural a y constante de rigidez k, que une el extremo A de la varilla con el punto fijo O y por un disco homogéneo, de masa M y radio R, que rueda sin deslizar sobre la varilla AB. En el instante inicial el punto de contacto de disco y varilla coincide con A que a su vez se encuentra a una distancia $2a$ del punto fijo O y el sistema está en reposo. Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales que determinan el movimiento del sistema.
2. Estudiar el movimiento del sistema para las condiciones iniciales dadas.
3. Determinar la fuerza que el disco ejerce sobre la varilla.

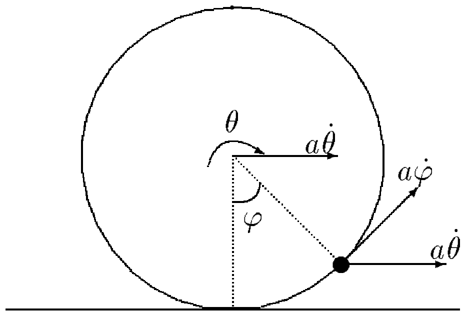
⋆

MECANICA

Practica n$^{\underline{o}}$ 9 curso 95-96

Soluciones

Ejercicio n$^{\underline{o}}$ 41.-



1.- Energía cinética del aro:

$$T_a = \frac{1}{2}mv_O^2 + \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}a)^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

Energía cinética de la masa puntual:

$$T_p = \frac{1}{2}(2m)v_m^2 = ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi)$$

Energía cinética del sistema:

$$T = T_a + T_p = 2ma^2\dot{\theta}^2 + ma^2\dot{\varphi}^2 + 2ma^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

2.- Tomando el nivel de referencia del potencial gravitatorio en la horizontal que pasa por el centro del aro:

$$V = -2mga\cos\varphi$$

3.- La función Lagrangiana es:

$$L = T - V = ma^2(2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi) + 2mga\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \Rightarrow \quad \theta \,\text{es coordenada cíclica.}$$

La ecuación de Lagrange correspondiente a esta coordenada es una integral primera del movimiento:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = C \quad \Rightarrow \quad 4ma^2\dot{\theta} + 2ma^2\dot{\varphi}\cos\varphi = C$$

Imponiendo las condiciones iniciales ($\dot{\theta}_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = v_0/a$, $\varphi_0 = 0$) se obtiene finalmente

$$\boxed{2\dot{\theta} + \dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{v_0}{a}} \tag{1}$$

4.- Como todas las fuerzas que trabajan son conservativas se cumple $T + V = E$ (constante). Sustituyendo, imponiendo las condiciones iniciales y simplificando se obtiene:

$$\boxed{2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{2g}{a}(1-\cos\varphi) = \frac{v_0^2}{a^2}} \tag{2}$$

5.- La integral de la ecuación obtenida en (1) es inmediata:

$$2\dot{\theta} + \dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{v_0}{a} \quad \Rightarrow \quad 2\theta + \operatorname{sen}\varphi = \frac{v_0}{a}t + C$$

Imponiendo las condiciones iniciales y tomando $\theta_0 = 0$:

$$\boxed{2\theta + \operatorname{sen}\varphi = \frac{v_0}{a}t} \tag{3}$$

6.- Las ecuaciones diferenciales del movimiento son (1) y (2). Despejando $\dot{\theta}$ en (1) y sustituyendo en (2) se obtiene:

$$\dot{\varphi}^2\left(\frac{1+\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right) + \frac{2g}{a}(1-\cos\varphi) - \frac{v_0^2}{2a^2} = 0$$

Para dejar el cálculo de φ reducido a una cuadratura despejamos $\dot{\varphi}$ en favor de φ e integramos:

$$t = \int_0^{\varphi} a\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}^2\varphi}{v_0^2 - 4ga(1-\cos\varphi)}}d\varphi$$

7.- La aceleración de la masa m la obtenemos derivando su velocidad.

Tomando un sistema de referencia $\{Oxy\}$ tal que Ox es horizontal hacia la derecha y Oy vertical ascendente

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_m &= (\dot{\theta}a + \dot{\varphi}a\cos\varphi)\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}a\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{a}_m &= (\ddot{\theta}a + \ddot{\varphi}a\cos\varphi - \dot{\varphi}^2a\operatorname{sen}\varphi)\boldsymbol{i} + (\ddot{\varphi}a\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2a\cos\varphi)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

Planteando $\Sigma \boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}$

$$\begin{aligned} R_x &= 2m(\ddot{\theta}a + \ddot{\varphi}a\cos\varphi - \dot{\varphi}^2 a \operatorname{sen}\varphi) \\ R_y - 2mg &= 2m(\ddot{\varphi}a\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2 a\cos\varphi) \end{aligned}$$

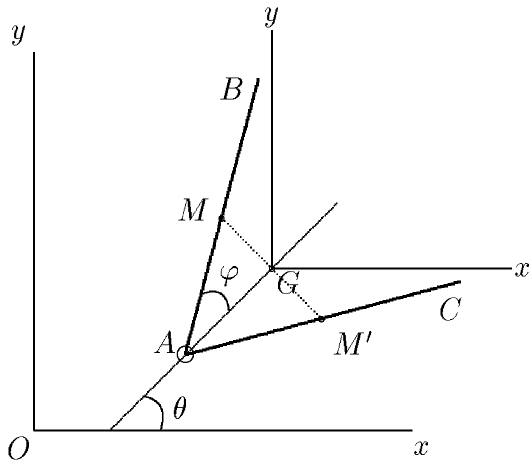
Derivando (1) y operando:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi}{2}$$

y sustituyendo:

$$\begin{aligned} R_x &= ma(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi) \\ R_y &= 2mg + 2ma(\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \end{aligned}$$

Ejercicio nº 42.-



En la función Lagrangiana del sistema solo entra la energía cinética ya que al moverse en un plano horizontal, la energía potencial de las varillas es constante. Aplicando el teorema de Koenig:

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + T_{AB}^{SCM} + T_{AC}^{SCM} \tag{1}$$

Llamando (x, y) a las coordenadas del centro de masas G:

$$\frac{1}{2}Mv_G^2 = \frac{1}{2}2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{2}$$

Respecto del Sistema del Centro de Masa, la energía cinética de cada una de las varillas consta de un término de rotación más uno de traslación de los respectivos puntos medios. Llamando 2φ al ángulo que forman las dos varillas:

$$T_{AB}^{SCM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)(\dot\theta+\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{GM}}{dt}\right)^2_{SCM} \tag{3}$$

$$T_{AC}^{SCM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)(\dot\theta-\dot\varphi)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{GM'}}{dt}\right)^2_{SCM} \tag{4}$$

Empleando coordenadas polares (ρ,θ) con centro en G, $\rho = GM = \frac{1}{2}l\operatorname{sen}\varphi$.

$$\left(\frac{d\boldsymbol{GM}}{dt}\right)^2_{SCM} = \left(\frac{d\boldsymbol{GM'}}{dt}\right)^2_{SCM} = \dot\rho^2+\rho^2\dot\theta^2 = \frac{1}{4}l^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \frac{1}{4}l^2\dot\theta^2\operatorname{sen}^2\varphi$$

Introduciendo estos resultados en (3) y (4), y operando con (1) y (2) resulta finalmente:

$$T = m(\dot x^2+\dot y^2) + \frac{1}{12}ml^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2) + \frac{1}{4}ml^2(\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\theta^2\operatorname{sen}^2\varphi)$$

La ecuación de Lagrange en φ es

$$ml^2\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\right)\ddot\varphi - \frac{1}{2}ml^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = 0$$

El resto de las coordenadas son cíclicas, al no intervenir en la lagrangiana. Se obtienen por tanto tres integrales primeras de este tipo:

1. $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot x = C_2$
   El significado físico de esta ecuación es la conservación de la cantidad de movimiento según el eje x.

2. $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot y = C_3$
   Esta ecuación establece la conservación de la cantidad de movimiento respecto del eje y

3. $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{6}ml^2\dot\theta + \dfrac{1}{2}ml^2\dot\theta\operatorname{sen}^2\varphi = C_4$
   Con esta integral primera se establece la conservación del momento cinético del sistema respecto de G.

Por último, se verifica la conservación de la energía: $T+V = C_1 \quad \Rightarrow \quad T = C_1$

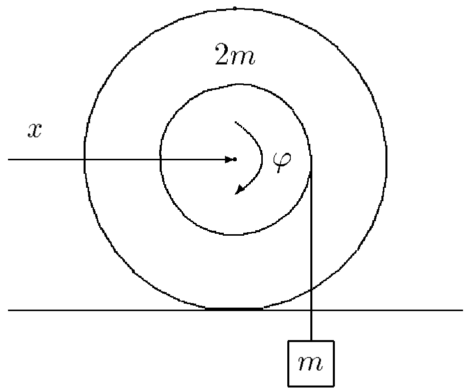
$$m(\dot x^2+\dot y^2) + \frac{1}{12}ml^2(\dot\theta^2+\dot\varphi^2) + \frac{1}{4}ml^2(\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\theta^2\operatorname{sen}^2\varphi) = C_1$$

Por tanto el sistema evoluciona de forma que su C.D.M. se mueve con velocidad uniforme rectilinea, o en reposo si inicialmente estaba así. Se conserva además el momento cinético respecto de G y la energía total.

Ejercicio nº 43.-

Tomamos como coordenadas generalizadas:

- $x \equiv$ traslación del centro O del disco.
- $\varphi \equiv$ ángulo girado por el disco.



Dado que el disco rueda y desliza, x y φ son coordenadas libres.

1.- Energía cinética del disco:

$$T_d = \frac{1}{2}2m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2mR^2\right)\dot{\varphi}^2 = m\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Energía cinética de la masa puntual:

$$T_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2\frac{R^2}{4}\right)$$

Energía cinética del sistema:

$$T = T_d + T_m = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\varphi}^2$$

2.- Para calcular las ecuaciones diferenciales del movimiento obtenemos la función Lagrangiana $L = T - V$ siendo la función potencial:

$$V = -mg\frac{R}{2}\varphi + \frac{1}{2}k(x + \varphi R)^2$$

y la energía cinética la calculada en el apartado anterior.

$$L = \frac{3}{2}m\dot{x}^2 + \frac{5}{8}mR^2\dot{\varphi}^2 + mg\frac{R}{2}\varphi - \frac{1}{2}k(x + \varphi R)^2$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} 3m\ddot{x} + k(x+\varphi R) &= 0 \qquad (1) \\ \frac{5}{4}mR^2\ddot{\varphi} + kR(x+\varphi R) - mg\frac{R}{2} &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

3.- En el instante inicial: $x = R$; $\varphi = 0$; $\dot{x} = 0$; $\dot{\varphi} = 0$.

Eliminando $k(x+\varphi R)$ de (1) y (2):

$$\frac{5}{4}R\ddot{\varphi} - 3\ddot{x} - \frac{g}{2} = 0$$

que integrada dos veces teniendo en cuenta las condiciones iniciales dá:

$$\frac{5}{4}R\varphi - 3x - \frac{gt^2}{4} + 3R = 0 \qquad (3)$$

Eliminando x en (1) a partir del resultado anterior se obtiene:

$$\ddot{\varphi} + \frac{17}{15}\frac{k}{m}\varphi = \frac{2}{5}\frac{g}{R} + \frac{kg}{15mR}t^2 - \frac{4}{5}\frac{k}{m}$$

Esta ecuación diferencial lineal de 2º orden tiene una solución suma de una particular de la completa más la general de la homogénea:

$$\varphi(t) = \overbrace{A\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{17k}{15m}}t + \alpha\right)}^{\varphi_h} + \overbrace{\frac{g}{17R}t^2 + \frac{72}{289}\frac{mg}{kR} - \frac{12}{17}}^{\varphi_p}$$

A y α se obtienen con las condiciones iniciales resultando:

$$A = \frac{12}{17} - \frac{72}{289}\frac{mg}{kR}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo $\varphi = \varphi(t)$ en (3) se obtiene $x = x(t)$:

$$x(t) = \left(\frac{5R}{17} - \frac{30}{289}\frac{mg}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{17k}{15m}}t\right) - \frac{1}{17}gt^2 + \frac{30}{289}\frac{mg}{k} + \frac{12}{17}R$$

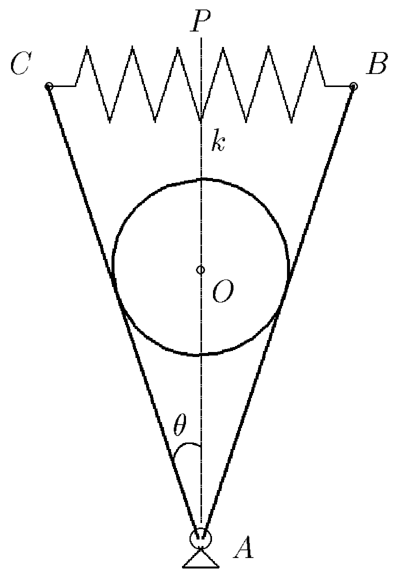
4.- Planteando el teorema de la cantidad de movimiento en dirección vertical al sistema masa-hilo:

$$T - mg = -m\ddot{\varphi}\frac{R}{2}$$

sustituyendo y operando

$$T = \frac{16}{17}mg + \left(\frac{2}{5}kR - \frac{12}{85}mg\right)\cos\left(\sqrt{\frac{17k}{15m}}t\right)$$

Ejercicio nº 44.-



1.- El sistema tiene un grado de libertad. Tomamos como coordenada generalizada el ángulo θ que forma la varilla AC con la recta fija AO. Obtenemos primero la velocidad de O:

$$AO = \frac{a/4}{\operatorname{sen}\theta} \quad \Rightarrow \quad v_O = -\frac{(a/4)\dot{\theta}\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2}mv_O^2 + 2\left(\frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2\right) = \frac{1}{32}ma^2\left(1 + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\right)\dot{\theta}^2$$

2.- El potencial proviene del muelle y de la fuerza atractiva:

$$V = V_{\text{muelle}} + V_f$$

$$V_{\text{muelle}} = \frac{1}{2}k \mid CB \mid^2 = 2ka^2\operatorname{sen}^2\theta$$

La fuerza atractiva que especifica el enunciado equivale a una resultante proporcional a la distancia al centro de masas del disco. Llamando x a $\mid OA \mid$ y tomando como versor $\boldsymbol{i} = \dfrac{\boldsymbol{AO}}{\mid AO \mid}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -4kx\boldsymbol{i} \\ F &= -\frac{dV_f}{dx} \quad \Rightarrow \quad V_f = \int_o^x 4kx\,dx = 2kx^2 = 2k\frac{a^2}{16\operatorname{sen}^2\theta} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$V = 2ka^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{8}\frac{ka^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

3.- La función Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{32} m a^2 \left(1 + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\right)\dot{\theta}^2 - 2ka^2 \operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{8}\frac{ka^2}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Haciendo

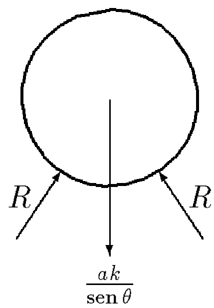
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

se obtiene la ecuación diferencial del movimiento que resulta:

$$\frac{1}{16} m a^2 \left(1 + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^4\theta}\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{16} m a^2 \frac{\cos\theta(1+\cos^2\theta)}{\operatorname{sen}^5\theta}\dot{\theta}^2 + ka^2\left(4\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{1}{4}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\right) = 0$$

4.- Derivando $\boldsymbol{v}_O$ de (1) se obtiene la aceleración del punto O, que lleva dirección vertical:

$$a_O \quad = \quad \frac{a}{4}\left(\frac{-\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\ddot{\theta} + \frac{1+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\dot{\theta}^2\right)$$



Planteando la ecuación de la dinámica en la dirección de $\boldsymbol{a}_O$:

$$\Sigma F = m a_O \quad \Rightarrow \quad 2R\operatorname{sen}\theta - \frac{ka}{\operatorname{sen}\theta} = m\frac{a}{4}\left(\frac{-\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\ddot{\theta} + \frac{1+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\dot{\theta}^2\right)$$

y despejando la reacción:

$$R = \frac{ka}{2\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{ma}{8\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{1+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^3\theta}\dot{\theta}^2 - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\ddot{\theta}\right)$$