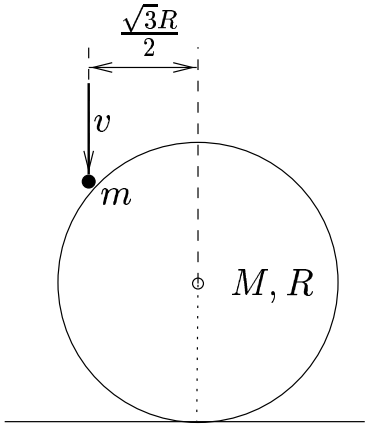
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (27 de Marzo de 1998)

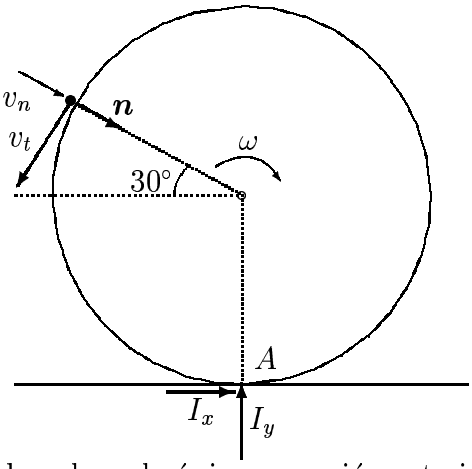
Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Un disco homogéneo de masa M y radio R contenido en un plano vertical puede rodar sin deslizar sobre una recta horizontal. Estando el disco en reposo recibe el impacto de una partícula de masa m con velocidad vertical v en un punto de su perímetro a una distancia $\sqrt{3}R/2$ del centro del disco, siendo este choque liso y con coeficiente de restitución e. Se admite que en el contacto del disco con la recta horizontal existe el rozamiento suficiente para que no se produzca deslizamiento debido a la impulsión. Se pide:



1. definir el movimiento de la partícula y del disco en el instante posterior al choque;
2. obtener el coeficiente de rozamiento necesario en el contacto del disco con la recta para que se mantenga la hipótesis hecha de rodadura sin deslizamiento.

1.- La impulsión de la partícula sobre el disco es normal al mismo por ser el choque entre ambos liso. Por tanto no se modifica la velocidad de la partícula en dirección tangencial, $v_t = v\sqrt{3}/2$. La velocidad normal antes del choque es $v/2$, y denominamos v_n a la que resulta después de la impulsión. Llamaremos ω a la velocidad de rotación que adquiere el disco. Por último, denotamos con I_x e I_y a las componentes de la percusión reactiva que se produce sobre el disco, en el punto A de contacto con la recta.



Consideramos el sistema conjunto disco + partícula, sobre el que la única percusión exterior es la reactiva en A. Planteamos en primer lugar el balance del momento cinético (en el punto A), teniendo en cuenta que no es necesario considerar el momento debido al término mv_t, que no varía durante la impulsión:

$$m\frac{v}{2}R\frac{\sqrt{3}}{2} = mv_nR\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}MR^2\omega \tag{1}$$

(recordemos que en una impulsión es válido plantear el balance del momento cinético en el centro de rodadura (A), aunque este punto no sea fijo a lo largo del tiempo).

Por otra parte, la ecuación del coeficiente de restitución se plantea con las velocidades relativas según la dirección de la percusión, normal al disco:

$$e\frac{v}{2} = -\left(v_n - \omega R\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{2}$$

Con las ecuaciones (1) y (2) se pueden resolver las incógnitas (v_n, ω), resultando:

$$v_n = \frac{m - 2Me}{m + 2M}\frac{v}{2}, \tag{3}$$

$$\omega = \frac{m}{m + 2M}\frac{v}{\sqrt{3}R}(1 + e), \tag{4}$$

con lo que queda definido completamente el movimiento después del choque.

2.- Para calcular la impulsión reactiva, establecemos el balance de la cantidad de movimiento (obviando al igual que antes el término mv_t):

$$m\frac{v}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + I_x = mv_n\frac{\sqrt{3}}{2} + M\omega R, \tag{5}$$

$$-m\frac{v}{2} \cdot \frac{1}{2} + I_y = -mv_n\frac{1}{2}, \tag{6}$$

Sustituyendo los valores de (3) y (4) resulta:

$$I_x = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{mM}{m + 2M}v(1 + e); \quad I_y = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + 2M}v(1 + e)$$

(el signo $-$ de I_x indica que se orienta en sentido contrario al tomado como positivo en la figura). El coeficiente de rozamiento necesario es pues

$$\mu \geq \frac{|I_x|}{|I_y|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

es decir, el ángulo de rozamiento debe ser al menos de 30°.

Observación.- Se puede comprobar que la impulsión reactiva resultante en A pasa precisamente por el punto de impacto de la masa. Por otra parte, su suma vectorial con la impulsión activa producida por ésta resulta en una impulsión neta horizontal de valor $I = MR\omega$ aplicada en el punto de impacto. Es fácil comprobar que un disco libre sometido a esta impulsión adquiere precisamente un movimiento que equivale a una rotación instantánea ω alrededor del punto A.