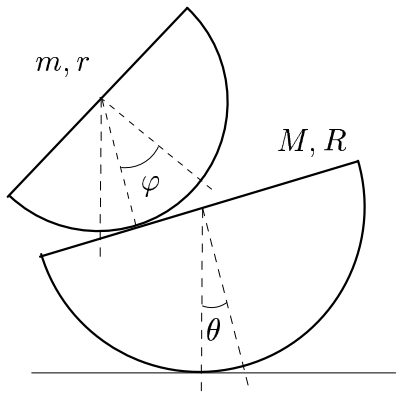
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (18 de Mayo de 1998)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Un semidisco homogéneo de radio R y masa M rueda sin deslizar sobre un suelo rugoso. Sobre este semidisco rueda sin deslizar otro de radio r y masa m, en la configuración que se muestra en la figura. Ambos semidiscos son del mismo material.
Se pide:



1. Expresión del potencial para una posición genérica, comprobando que la posición $\theta = 0, \varphi = 0$ es de equilibrio;
2. Discutir la estabilidad de esta posición en función de (R/r);

1.- El potencial del sistema en una posición genérica definida en la figura del enunciado es

$$V(\theta,\varphi) = -Mg\left(\frac{4R}{3\pi}\cos\theta\right) + mg\left(-r\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta - \frac{4r}{3\pi}\cos(\theta+\varphi)\right) \tag{1}$$

Las derivadas del mismo son

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = Mg\frac{4R}{3\pi}\,\mathrm{sen}\,\theta + mg\left(-r\varphi\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{4r}{3\pi}\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = mg\left(-r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{4r}{3\pi}\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)\right) \tag{3}$$

Se comprueba inmediatamente que $(\theta,\varphi) = (0,0)$ es una posición de equilibrio.

Aunque no se pide en el problema, podemos comprobar que en general caben otras posiciones de equilibrio además de la indicada. Para ello eliminamos $\tan\theta$ entre (2, 3) obteniendo

$$\frac{3\pi\varphi - 4\,\mathrm{sen}\,\varphi}{4\lambda^3 - 3\pi + 4\cos\varphi} = \frac{-4\,\mathrm{sen}\,\varphi}{-3\pi + 4\cos\varphi}, \tag{4}$$

donde se ha simplificado la expresión llamando $\lambda = R/r$ y considerando que al ser del mismo material los semidiscos se verifica $M/m = \lambda^2$. La ecuación (4) es no lineal en función de φ. Según el valor de λ puede tener o no soluciones distintas de $\varphi = 0$. Por ejemplo, en el caso $\lambda = 1$ no existen tales soluciones adicionales (con lo que la única posición de equilibrio sería la $(0,0)$), mientras que si $\lambda = 2$, resolviendo numéricamente (4), comprobamos que existen otras dos posiciones de equilibrio simétricas: $(\theta_1,\varphi_1) = (-1.4882, -0.4131)$ y $(\theta_2,\varphi_2) = (1.4882, 0.4131)$.

2.- Para estudiar la estabilidad evaluamos las derivadas segundas de V:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = Mg\frac{4R}{3\pi}\cos\theta + mg\left(r\varphi \operatorname{sen}\theta - r\cos\theta + \frac{4r}{3\pi}\cos(\theta+\varphi)\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} = mg\left(-r\cos\theta + \frac{4r}{3\pi}\cos(\theta+\varphi)\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = mg\frac{4r}{3\pi}\cos(\theta+\varphi) \tag{7}$$

Particularizando para la posición de equilibrio $(\theta, \varphi) = (0, 0)$, la matriz de derivadas segundas (Hessiano) es:

$$\mathbf{H}|_{(0,0)} = mrg\begin{pmatrix} \frac{4\lambda^3+4-3\pi}{3\pi} & \frac{4-3\pi}{\pi} \\ \frac{4-3\pi}{\pi} & \frac{4}{3\pi} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Para la estabilidad el potencial debe tener un mínimo local, lo que equivale a que el Hessiano sea definido positivo. Esto se concreta en dos condiciones, correspondientes a exigir que los dos menores principales sean positivos:

$$H_{1,1} = mrg\frac{4\lambda^3+4-3\pi}{3\pi} > 0; \tag{9}$$

$$|\mathbf{H}| = (mrg)^2\frac{16\lambda^3+12\pi-9\pi^2}{9\pi^2} > 0 \tag{10}$$

Expresando estas dos condiciones en función de λ,

$$\lambda^3 > \frac{3\pi}{4} - 1; \tag{11}$$

$$\lambda^3 > (\frac{3\pi}{4} - 1)\frac{3\pi}{4} \tag{12}$$

la segunda resulta evidentemente más restrictiva y es la que define el valor mínimo necesario para que el equilibrio en esta posición sea estable. Evaluando la expresión (12) resulta $\lambda > 1.472915064$.

Por último, hacemos notar que para las otras posiciones de equilibrio mencionadas antes para el caso $\lambda = 2$, se puede comprobar que son inestables y corresponden a puntos de ensilladura del potencial.