Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (28 de Octubre de 1997)

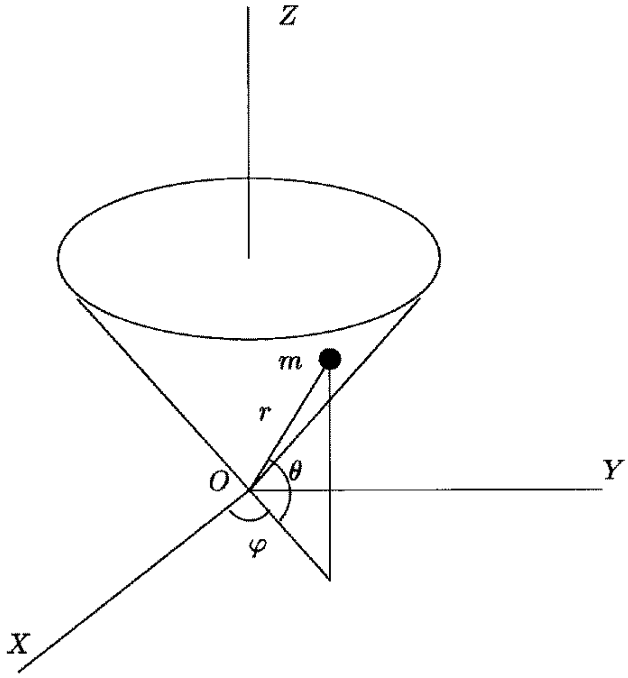
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una partícula pesada de masa m se mueve con ligadura bilateral sobre el cono:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

siendo $z > 0$. En el instante inicial la partícula se encuentra en $z = z_0$ con velocidad horizontal $v_0 = \omega_0 z_0$. Empleando coordenadas esféricas, se pide:

1. Calcular el momento respecto de O de las fuerzas aplicadas sobre la partícula en un instante genérico, y su proyección sobre el eje OZ.
2. Calcular el momento cinético de la partícula respecto de O en un instante genérico, y su proyección sobre el eje OZ.
3. Expresión de la energía total de la partícula, en un instante genérico.
4. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
5. Determinar entre que valores de z se desarrolla el movimiento.
6. Calcular el valor necesario de ω_0 para que la trayectoria de la partícula sea una circunferencia.



---

1. Las fuerzas aplicadas sobre la partícula, son el peso y la reacción normal del cono sobre ella. Las expresiones de dichas fuerzas son:

$$\mathbf{W} = -mg\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_\theta) \tag{1}$$
$$\mathbf{N} = N\mathbf{u}_\theta \tag{2}$$

Tomando momentos en O y sustituyendo las expresiones (1) y (2), resulta:

$$\mathbf{M}_O = r\mathbf{u}_r \wedge (\mathbf{W} + \mathbf{N}) = r\left(mg\frac{\sqrt{2}}{2} - N\right)\mathbf{u}_\varphi \tag{3}$$

La expresión del eje vertical en la base asociada a las coordenadas esféricas es:

$$\mathbf{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_\theta) \tag{4}$$

y la proyección de $\mathbf{M}_O$ sobre $\mathbf{k}$:

$$M_O = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k} = 0 \tag{5}$$

2. La expresión de la velocidad en coordenadas esféricas es:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{u}_\varphi \tag{6}$$

Sustituyendo en (6) la ecuación del cono:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \tag{7}$$

se obtiene la expresión de la velocidad de la partícula:

$$\mathbf{v}_P = \dot{r}\mathbf{u}_r + \frac{\sqrt{2}}{2}r\dot{\varphi}\mathbf{u}_\varphi \tag{8}$$

El momento cinético respecto de O se obtiene calculando el momento de la cantidad de movimiento respecto de dicho punto:

$$\mathbf{H}_O = r\mathbf{u}_r \wedge m\mathbf{v}_P = \frac{\sqrt{2}}{2}mr^2\dot{\varphi}\mathbf{u}_\theta \tag{9}$$

y empleando (4), la proyección de $\mathbf{H}_O$ sobre el eje vertical resulta:

$$H_O = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi} \tag{10}$$

3. La energía total de la partícula es la suma de la energía cinética y de la energía potencial de la misma:

$$T = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgz = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\operatorname{sen}\theta \tag{11}$$

4. Dado que todas las fuerzas que realizan trabajo son conservativas, la energía total es constante:

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\frac{\sqrt{2}}{2} = E \tag{12}$$

La constante E se obtiene particularizando (12) para las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} r_0 &= z_0\sqrt{2} \\ \theta_0 &= \frac{\pi}{4} \\ \varphi_0 &= 0 \\ \dot{r}_0 = \dot{\theta}_0 &= 0 \\ \dot{\varphi} &= \omega_0 \end{aligned}$$

de donde:

$$E = \frac{1}{2}mz_0^2\omega_0^2 + mgz_0 \tag{13}$$

Sustituyendo (13) en (12) se obtiene la primera ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}mz_0^2\omega_0^2 + mgz_0 \tag{14}$$

Dada que la proyección del momento de las fuerzas sobre el eje vertical es cero, la proyección del momento cinético sobre dicho eje es constante:

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi} = C \tag{15}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales para calcular C, se obtiene la segunda ecuación diferencial:

$$r^2\dot{\varphi} = 2z_0^2\omega_0 \tag{16}$$

5. En los puntos de altura máxima y mínima se verifica:

$$\dot{r} = 0$$

Sustituyendo (16) en la ecuación (14) para eliminar $\dot{\varphi}$, e imponiendo $\dot{r} = 0$, se obtiene después de operar:

$$g\frac{\sqrt{2}}{2}r^3 - \left(\frac{\omega_0^2 z_0^2}{2} + gz_0\right)r^2 + z_0^4\omega_0^2 = 0 \tag{17}$$

Como en el instante inicial la velocidad es horizontal, la solución $r = \sqrt{2}z_0$ se pude eliminar por Rufini de la ecuación anterior, resultando:

$$g\frac{\sqrt{2}}{2}r^2 - \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2}r - \frac{\sqrt{2}}{2}z_0^3\omega_0^2 = 0 \tag{18}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, resulta:

$$r_1 = \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2\sqrt{2}g} + \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2g\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{8g}{\omega_0^2 z_0^2}}$$

$$r_2 = \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2\sqrt{2}g} - \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2g\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{8g}{\omega_0^2 z_0^2}}$$

Teniendo significado físico únicamente la primera ($r > 0$):

$$r = \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2\sqrt{2}g} + \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2g\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{8g}{\omega_0^2 z_0^2}} \tag{19}$$

Por tanto, el movimiento se desarrolla entre la posición inicial ($r = \sqrt{2}z_0$) y la expresada en (19)

6. Imponiendo en (19) que r sea la posición inicial:

$$\sqrt{2}z_0 = \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2\sqrt{2}g} + \frac{\omega_0^2 z_0^2}{2g\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{8g}{\omega_0^2 z_0^2}} \tag{20}$$

Despejando se obtiene el valor necesario de ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{z_0}} \tag{21}$$