```
> restart:
```

Curso de Doctorado:
MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS LINEAL.
PROBLEMA PARA RESOLVER
Jose M. Goicolea (4 Abril 1997)
ENUNCIADO:
Sea una viga de masa despreciable empotrada en un extremo, de Longitud L, módulo elástico E e inercia J. A una distancia $\frac{L}{2}$ del empotramiento hay una masa puntual de valor $\frac{m\,L}{2}$, y en el extremo libre una masa puntual de valor $\frac{m\,L}{4}$. Se pide:

1) ecuaciones diferenciales del movimiento, expresando las matrices de masa y de rigidez;

2) frecuencias propias, modos normales de vibración y expresión de las coordenadas normales (particularizar para los valores numéricos $m = 1$, $L = 1$, $E = 1$, $J = 1$);

4) suponiendo una carga transversal aplicada en el extremo de la viga, definida por la ley $p\sin(\Omega\,t)$, ecuaciones del movimiento en coordenadas normales e integración de las mismas (particularizar para los valores numéricos $p = 1$, $\Omega = .9\,\omega.min$);

5) resolución de las ecuaciones en coordenadas normales y en coordenadas geométricas, dibujando las gráficas correspondientes;

6) régimen permanente (supuesto un pequeño amortiguamiento inevitable)

7) empleando el programa "felt"de elementos finitos, calcular los modos normales y frecuencias propias de vibración de este sistema y comprobar con los resultados de maple.

8) empleando "felt"realizar la integración en el tiempo para una duración total de 10 seg. y comprobar los resultados con los de maple.

9) empleando "felt"realizar el modelo pero empleando masa distribuida a lo largo de las vigas equivalente a las masas puntuales, de valor m por unidad de longitud. Explicar los resultados.

(se despreciarán las fuerzas gravitatorias)

NOTA: habrá de entregarse este problema resuelto **antes del 8/5/97**. Los programas felt y Maple están disponibles en el aula de informática de la escuela. Estoy disponible para consultar dudas en mi horario de tutoría, martes y jueves por la mañana, aunque recomiendo llaméis con antelación para asegurar que no tengo ninguna reunión que me impida estar en el despacho. Podéis consultar dudas por e-mail a goicolea@mecanica.upm.es

Expresamos en primer lugar la energia cinética y la energía potencial de deformación. Estas expresiones engloban toda la información del sistema, y nos servirán para obtener las ecuaciones del movimiento. Como notación, empleamos la letra "tª continuación del nombre de una variable (q1t, q2t) para referirnos a las derivadas respecto de t.

```
> V:=(1/2)*(48*E*J/(7*L^3))*(2*q1^2+2*(-5)*q1*q 2+16*q2^2);
```

$$V := \frac{24}{7}\,\frac{E\,J\,(2\,q1^2 - 10\,q1\,q2 + 16\,q2^2)}{L^3}$$

```
> T:=(1/2)*(m*L)*((1/4)*q1t^2+(1/2)*q2t^2);
```

$$T := \frac{1}{2}\, m\, L\, (\frac{1}{4}\, q1t^2 + \frac{1}{2}\, q2t^2)$$

```
> M := matrix(2,2,[[diff(T,q1t$2),diff(T,q1t,q2t)],[diff(T,q2t,q1t),diff(T,q2
t$2)]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\, m\, L & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\, m\, L \end{bmatrix}$$

```
> K := matrix(2,2,[[diff(V,q1$2),diff(V,q1,q2)],[diff(V,q2,q1),diff(V,q2$2)]]
);
```

$$K := \begin{bmatrix} \frac{96}{7}\, \frac{E\, J}{L^3} & -\frac{240}{7}\, \frac{E\, J}{L^3} \\ -\frac{240}{7}\, \frac{E\, J}{L^3} & \frac{768}{7}\, \frac{E\, J}{L^3} \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

```
> ec1:=M[1,1]*diff(q1(t),t$2)+M[1,2]*diff(q2(t) ,t$2)+K[1,1]*q1(t)+K[1,2]*q2(t)=0;
```

$$ec1 := \frac{1}{4}\, m\, L\, (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, \mathrm{q1}(t)) + \frac{96}{7}\, \frac{E\, J\, \mathrm{q1}(t)}{L^3} - \frac{240}{7}\, \frac{E\, J\, \mathrm{q2}(t)}{L^3} = 0$$

```
> ec2:=M[2,1]*diff(q1(t),t$2)+M[2,2]*diff(q2(t) ,t$2)+K[2,1]*q1(t)+K[2,2]*q2(t)=0;
```

$$ec2 := \frac{1}{2}\, m\, L\, (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, \mathrm{q2}(t)) - \frac{240}{7}\, \frac{E\, J\, \mathrm{q1}(t)}{L^3} + \frac{768}{7}\, \frac{E\, J\, \mathrm{q2}(t)}{L^3} = 0$$

Especificamos los valores numéricos (no serán activos hasta que se emplee la instrucción ªssign":

```
> datos:={m=1,L=1,E=1,J=1};
```

$$datos := \{m = 1,\, L = 1,\, E = 1,\, J = 1\}$$

Cargamos la libreria "linalg"que permite trabajar con matrices, calcular autovalores y autovectores, etc.

```
> with(linalg):

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace

> f:=vector(2,[0,p*sin(Omega*t)]);
```

$$f := [0,\, p \sin(\Omega\, t)]$$

La funcion "eigenvals"es capaz de calcular los autovalores en forma simbólica para el problema de autovalores generalizado definido por las matrices M y K:

```
> ome:=eigenvals(K,M);
```

$$ome := 96\,\frac{(\frac{10}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m},\; 96\,\frac{(\frac{10}{7}-\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m}$$

extraemos la raiz cuadrada para expresar las frecuencias propias:

```
> ome:=map(sqrt,{ome});
```

$$ome := \left\{4\sqrt{6}\sqrt{\frac{(\frac{10}{7}-\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m}},\; 4\sqrt{6}\sqrt{\frac{(\frac{10}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m}}\right\}$$

```
> evalf(ome);
```

$$\{3.156232479\sqrt{\frac{J\,E}{L^4\,m}},\; 16.25804142\sqrt{\frac{J\,E}{L^4\,m}}\}$$

obtenemos ahora los autovectores o modos normales de vibración, de forma simbólica, como el núcleo ("kernel") de la matriz característica ("charmat", $M^{(-1)}\,K-\omega^2\,I$) correspondiente a cada autovalor:

```
> charmat(inverse(M) &* K,ome[1]^2);
```

$$\begin{bmatrix} 96\,\frac{(\frac{10}{7}-\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m}-\frac{384}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} & \frac{960}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} \\ \frac{480}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} & 96\,\frac{(\frac{10}{7}-\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m}-\frac{1536}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} \end{bmatrix}$$

```
> v1:=kernel(")[];
```

$$v1 := \left[\frac{6}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{86},\; 1\right]$$

```
> charmat(inverse(M) &* K,ome[2]^2);
```

$$\begin{bmatrix} 96\,\frac{(\frac{10}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m}-\frac{384}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} & \frac{960}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} \\ \frac{480}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} & 96\,\frac{(\frac{10}{7}+\frac{1}{7}\sqrt{86})\,J\,E}{L^4\,m}-\frac{1536}{7}\,\frac{J\,E}{L^4\,m} \end{bmatrix}$$

```
> v2:=kernel(")[];
```

$$v2 := \left[\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{86},\; 1\right]$$

normalizamos respecto de la matriz de masas M

```
> a1:=scalarmul(v1,simplify(1/sqrt(innerprod(v1 ,M,v1))));
```

$$a1 := \left[5\,\frac{\frac{6}{5}+\frac{1}{5}\sqrt{86}}{\sqrt{m\,L\,(43+3\sqrt{86})}},\ \frac{5}{\sqrt{m\,L\,(43+3\sqrt{86})}}\right]$$

```
> a2:=scalarmul(v2,simplify(1/sqrt(innerprod(v2 ,M,v2))));
```

$$a2 := \left[5\,\frac{\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{86}}{\sqrt{m\,L\,(43-3\sqrt{86})}},\ \frac{5}{\sqrt{m\,L\,(43-3\sqrt{86})}}\right]$$

asignamos valores numericos para evaluar numéricamente los modos de vibración

```
> assign(datos):
> ome:=evalf(ome);
```

$$ome := \{3.156232479,\ 16.25804142\}$$

```
> a1:=map(evalf,map(eval,a1));
> a2:=map(evalf,map(eval,a2));
```

$$a1 := [1.814936164,\ .5941408595]$$

$$a2 := [-.8402420615,\ 1.283353669]$$

La matriz modal es

```
> A:=matrix([a1,a2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1.814936164 & .5941408595 \\ -.8402420615 & 1.283353669 \end{bmatrix}$$

comprobamos la diagonalizacion simultanea de M y K:

```
> MD:=evalm(A &* M &* transpose(A));
```

$$MD := \begin{bmatrix} 1.000000000 & 0 \\ 0 & 1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> KD:=evalm(A &* K &* transpose(A));
```

$$KD := \begin{bmatrix} 9.961803467 & .6\,10^{-8} \\ 0 & 264.3239110 \end{bmatrix}$$

Otro modo de operar es mediante la función "Eigenvals". Esta es más cómoda, pero sólo funciona con valores numéricos (de punto flotante), no es capaz de extraer los autovalores de forma simbólica. Proporciona los vectores propios en la matriz "vects", dispuestos en columnas, y normalizados con el criterio de componente máximo igual a la unidad:

```
> #assign(datos):
> evalf(Eigenvals(K,M,vects));
```

$$[264.3239107, 9.961803412]$$

```
> print(vects);
```

$$\begin{bmatrix} .6547236990 & -1.000000000 \\ -1.000000000 & -.3273618497 \end{bmatrix}$$

Comprobamos que el resultado coincide con lo obtenido arriba, con igual criterio de normalización:

```
> matrix([scalarmul(v1,1/max(v1[1],v1[2])),
> scalarmul(v2,1/max(v2[1],v2[2]))]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{\dfrac{6}{5}+\dfrac{1}{5}\sqrt{86}} \\ \dfrac{6}{5}-\dfrac{1}{5}\sqrt{86} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> map(evalf,map(eval,"));
```

$$\begin{bmatrix} 1. & .3273618496 \\ -.654723699 & 1. \end{bmatrix}$$

Ecuaciones en coordenadas normales:

```
> fu:=evalm(A &* f);
```

$$fu := [.5941408595\, p \sin(\Omega\, t),\ 1.283353669\, p \sin(\Omega\, t)]$$

```
> datos1:={p=1,Omega=0.9*min(ome[1],ome[2])};
```

$$datos1 := \{p = 1,\ \Omega = 2.840609231\}$$

```
> #assign(datos1);
> #p:=´p´;Omega:=´Omega´;
> ecn1:=diff(u[1](t),t$2)+ome[1]^2*u[1](t)=fu[1 ];
```

$$ecn1 := (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u_1(t)) + 9.961803461\, u_1(t) = .5941408595\, p \sin(\Omega\, t)$$

```
> ecn2:=diff(u[2](t),t$2)+ome[2]^2*u[2](t)=fu[2 ];
```

$$ecn2 := (\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u_2(t)) + 264.3239108\, u_2(t) = 1.283353669\, p \sin(\Omega\, t)$$

la resolución se hace directamente, de forma analítica, mediante "dsolve", con "type=laplace"en este caso:

```
> sol1:=dsolve({ecn1,D(u[1])(0)=0,u[1](0)=0}, {u[1](t)},method=laplace);
```

$$sol1 := u_1(t) = .5941408595\, 10^9 p\, \Omega(.3168334421 \frac{\sin(3.156232479\, t)}{.1000000000\, 10^{10}\, \Omega^2 - .9961803461\, 10^{10}} - 1. \frac{\sin(\Omega\, t)}{(.1000000000\, 10^{10}\, \Omega^2 - .9961803461\, 10^{10})\, \Omega})$$

```
> sol2:=dsolve({ecn2,D(u[2])(0)=0,u[2](0)=0}, {u[2](t)},method=laplace);
```

$$sol2 := u_2(t) = .3208384173\, 10^7 p\, \Omega(.06150802389 \frac{\sin(16.25804142\, t)}{.2500000\, 10^7\, \Omega^2 - .660809777\, 10^9} - 1. \frac{\sin(\Omega\, t)}{(.2500000\, 10^7\, \Omega^2 - .660809777\, 10^9)\, \Omega})$$

La instrucción ªsignªsigna las igualdades de las soluciones anteriores, definiendo de forma efectiva las funciones u1(t) y u2(t), en las que a continuación sustituimos ("subs") los valores numéricos de la fuerza de excitación contenidos en "datos1":

```
> assign({sol1,sol2});
> u[1](t):=subs(datos1,u[1](t));
```

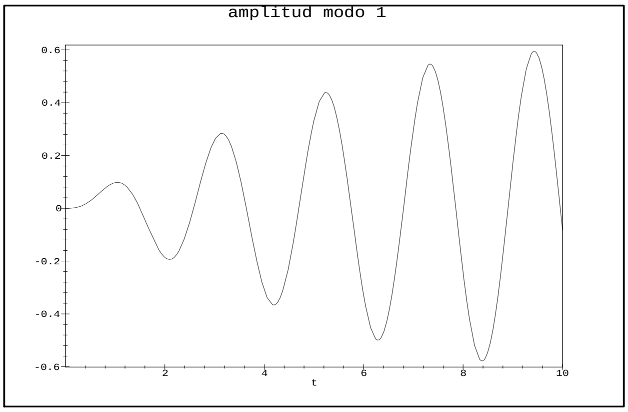
$$u_1(t) := -.2825142507 \sin(3.156232479\, t) + .3139047228 \sin(2.840609231\, t)$$

```
> u[2](t):=subs(datos1,u[2](t));
```

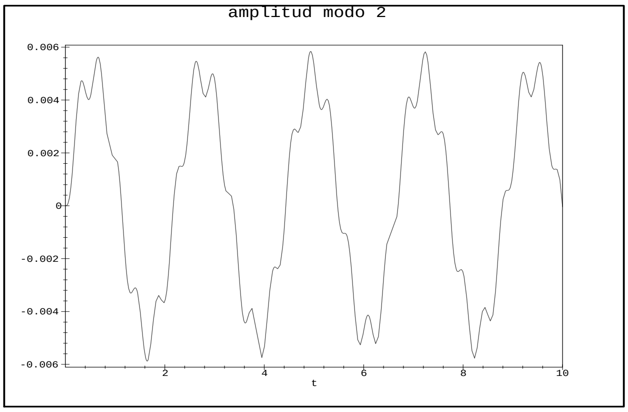
$$u_2(t) := -.0008750190965 \sin(16.25804142\, t) + .005008114653 \sin(2.840609231\, t)$$

Gráficas de las coordenadas normales (amplitudes modales):

```
> plot(u[1](t),t=0..10,axes=BOXED,title=`amplit ud modo 1`);
```




```
> plot(u[2](t),t=0..10,axes=BOXED,title=`amplit ud modo 2`);
```

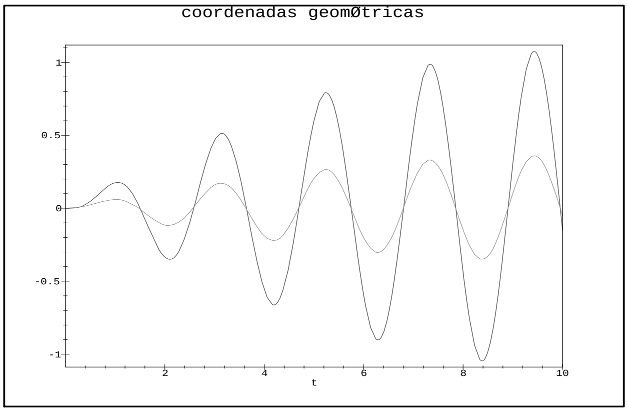


Evaluamos las coordenadas geométricas, deshaciendo el cambio a las coordenadas normales, y dibujamos la gráfica:

```
> q:=evalm(transpose(A) &* [u[1](t),u[2](t)]);
```

$$q := [-.5127453304\sin(3.156232479\,t) + .5655090049\sin(2.840609231\,t) + .0007352278495\sin(16.25804142\,t), -.1678532597\sin(3.156232479\,t) + .1929308041\sin(2.840609231\,t) - .001122958968\sin(16.25804142\,t)]$$

```
> plot({q[1],q[2]},t=0..10,axes=BOXED,title=` coordenadas geométricas`);
```


coordenadas geomØtricas
1
0.5
0
-0.5
-1
2
4
6
8
10
t