```
> restart:
```

Curso de Doctorado:

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISIS LINEAL.

RESOLUCIÓN POR ANÁLISIS MODAL DE OSCILACIONES CON n G.D.L.

Jose M. Goicolea (4 Abril 1997)

Un sistema está formado por tres masas de valor m cada una, unidas entre sí y a un punto fijo por muelles iguales de constante k, y amortiguamiento viscoso de Rayleigh, con valor $a.0$ de la constante de masa y $a.1 = \frac{c}{k}$ de la de rigidez. Se pide:

1) ecuaciones diferenciales del movimiento, expresando las matrices de masa y de rigidez;

2) frecuencias propias, modos normales de vibración y expresión de las coordenadas normales;

4) suponiendo una carga transversal aplicada en la masa del extremo, definida por la ley $p \sin(\Omega t)$, ecuaciones del movimiento en coordenadas normales e integración de las mismas (particularizar para los valores numéricos $p = 1$, $\Omega = .9\, \omega.min$;

5) resolución de las ecuaciones en coordenadas normales y en coordenadas geométricas, dibujando las gráficas correspondientes;

6) régimen permanente.

7) repetir para $\Omega = .9\, \omega.int$ (frec. intermedia).

Resolver el problema con felt empleando elementos "truss". (tomar $m = 1$, $k = 100$, $c = .2$, $a.0 = .2$)

Expresamos en primer lugar la energia cinética y la energía potencial de deformación. Estas expresiones engloban toda la información del sistema, y nos servirán para obtener las ecuaciones del movimiento. Como notación, empleamos la letra "t$^{\underline{a}}$ continuación del nombre de una variable (x1t, x2t, x3t) para referirnos a las derivadas respecto de t.

```
> V:=(1/2)*k*x1^2+(1/2)*k*(x2-x1)^2+(1/2)*k*(x3 -x2)^2;
```

$$V := \frac{1}{2}\, k\, \mathit{x1}^2 + \frac{1}{2}\, k\, (\mathit{x2} - \mathit{x1})^2 + \frac{1}{2}\, k\, (\mathit{x3} - \mathit{x2})^2$$

```
> T:=(1/2)*m*x1t^2+(1/2)*m*x2t^2+(1/2)*m*x3t^2;
```

$$T := \frac{1}{2}\, m\, \mathit{x1t}^2 + \frac{1}{2}\, m\, \mathit{x2t}^2 + \frac{1}{2}\, m\, \mathit{x3t}^2$$

```
> M := matrix(3,3,[[diff(T,x1t,x1t),diff(T,x1t,x2t),diff(T,x1t,x3t)],[diff(T,
x1t,x2t),diff(T,x2t,x2t),diff(T,x2t,x3t)],[diff(T,x3t,x1t),diff(T,x3t,
x2t),diff(T,x3t,x3t)]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

```
> K := matrix(3,3,[[diff(V,x1$2),diff(V,x1,x2),diff(V,x1,x3)],[diff(V,x1,x2),
diff(V,x2,x2),diff(V,x2,x3)],[diff(V,x3,x1),diff(V,x3,x2),diff(V,x3,x3
)]]);
```

$$K := \begin{bmatrix} 2\,k & -k & 0 \\ -k & 2\,k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Definimos una matriz de amortiguamiento de Rayleigh mediante los coeficientes *a0* (masa) y $a1 = \frac{c}{k}$ (rigidez):

```
> C := evalm(a0*M+a1*K);
```

$$C := \begin{bmatrix} a0\,m + 2\,a1\,k & -a1\,k & 0 \\ -a1\,k & a0\,m + 2\,a1\,k & -a1\,k \\ 0 & -a1\,k & a0\,m + a1\,k \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

```
> ec1:=M[1,1]*diff(x1(t),t$2)+M[1,2]*diff(x2(t) ,t$2)+M[1,3]*diff(x3(t),t$2)+C[1,1]*diff(x1(t),t)+C[1,2]*diff(x2(t),t)
+C[1,3]*diff(x3(t),t)+K[1,1]*x1(t)+K[1,2]*x2(t)+K[1,3]*x3(t)=0;
```

$$ec1 := m\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x1}(t)) + (a0\,m + 2\,a1\,k)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x1}(t)) - a1\,k\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x2}(t)) + 2\,k\,\mathrm{x1}(t) - k\,\mathrm{x2}(t) = 0$$

```
> ec2:=M[2,1]*diff(x1(t),t$2)+M[2,2]*diff(x2(t) ,t$2)+M[2,3]*diff(x3(t),t$2)+C[2,1]*diff(x1(t),t)+C[2,2]*diff(x2(t),t)
+C[2,3]*diff(x3(t),t)+K[2,1]*x1(t)+K[2,2]*x2(t)+K[2,3]*x3(t)=0;
```

$$ec2 := m\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x2}(t)) - a1\,k\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x1}(t)) + (a0\,m + 2\,a1\,k)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x2}(t)) - a1\,k\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x3}(t)) - k\,\mathrm{x1}(t)$$
$$+ 2\,k\,\mathrm{x2}(t) - k\,\mathrm{x3}(t) = 0$$

```
> ec3:=M[3,1]*diff(x1(t),t$2)+M[3,2]*diff(x2(t) ,t$2)+M[3,3]*diff(x3(t),t$2)+C[3,1]*diff(x1(t),t)+C[3,2]*diff(x2(t),t)
+C[3,3]*diff(x3(t),t)+K[3,1]*x1(t)+K[3,2]*x2(t)+K[3,3]*x3(t)=0;
```

$$ec3 := m\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x3}(t)) - a1\,k\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x2}(t)) + (a0\,m + a1\,k)\,(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x3}(t)) - k\,\mathrm{x2}(t) + k\,\mathrm{x3}(t) = 0$$

Especificamos los valores numéricos (no serán activos hasta que se emplee la instrucción ªssign").

```
> datos:={m=1,k=100,c=.2,a.0=0.2,a.1=c/k};
> assign(datos);
```

$$datos := \{a0 = .2,\ m = 1,\ k = 100,\ c = .2,\ a1 = \frac{c}{k}\}$$

Cargamos la libreria "linalg"que permite trabajar con matrices, calcular autovalores y autovectores, etc.

```
> with(linalg):
Warning, new definition for norm
```

```
Warning, new definition for trace
```

```
> f:=vector(3,[0,0,p*sin(Omega*t)]);
```

$$f := [0,\, 0,\, p\sin(\Omega\, t)]$$

```
> datos1:={p=1,Omega=0.9*min(omega[1],omega[2] ,omega[3])};
```

$$\mathit{datos1} := \{p = 1,\, \Omega = .9\min(\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_3)\}$$

Asignamos los valores numéricos y evaluamos los autovalores y vectores propios mediante la función "Eigenvals":

```
> lambda:=evalf(Eigenvals(K,M,vects));
```

$$\lambda := [324.6979600,\, 155.4958138,\, 19.80622645]$$

Las frecuencias propias son las raíces cuadradas de los autovalores:

```
> omega:=map(sqrt,lambda);
```

$$\omega := [18.01937735,\, 12.46979606,\, 4.450418683]$$

La matriz modal (vectores propios en filas) es la traspuesta de la que obtiene "Eigenvals", que los obtiene en columnas:

```
> A:=transpose(vects);
```

$$A := \begin{bmatrix} .8019377339 & -1.000000000 & .4450418687 \\ 1.000000000 & .4450418669 & -.8019377339 \\ .4450418685 & .8019377373 & 1.000000000 \end{bmatrix}$$

```
> v.1 := linalg[submatrix](vects, 1..3, 1..1);
```

$$\mathit{v1} := \begin{bmatrix} .8019377339 \\ -1.000000000 \\ .4450418687 \end{bmatrix}$$

Comprobamos que efectivamente $\mathit{v1}$ es un vector propio con autovalor λ_1

```
> evalm(K &* v.1)=scalarmul(M &* v.1,lambda[1]);
```

$$\begin{bmatrix} 260.3875468 \\ -324.6979603 \\ 144.5041869 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260.3875462 \\ -324.6979600 \\ 144.5041869 \end{bmatrix}$$

Diagonalización de las matrices M, K, y C y comprobación de los resultados

```
> MD:=evalm(A &* M &* transpose(A));
```

$$MD := \begin{bmatrix} 1.841166394 & -.7\,10^{-9} & -.11\,10^{-8} \\ -.7\,10^{-9} & 1.841166392 & .23\,10^{-8} \\ -.11\,10^{-8} & .23\,10^{-8} & 1.841166399 \end{bmatrix}$$

```
> KD:=evalm(A &* K &* transpose(A));
```

$$KD := \begin{bmatrix} 597.8229729 & .2\,10^{-6} & -.3\,10^{-6} \\ .14\,10^{-6} & 286.2936654 & .2\,10^{-6} \\ -.424\,10^{-6} & .26\,10^{-6} & 36.46655865 \end{bmatrix}$$

```
> CD:=evalm(A &* C &* transpose(A));
```

$$CD := \begin{bmatrix} 1.563879225 & .2\,10^{-9} & -.9\,10^{-9} \\ .3\,10^{-9} & .9408206093 & .8\,10^{-9} \\ -.10\,10^{-8} & .9\,10^{-9} & .4411663970 \end{bmatrix}$$

```
> KD[1,1]/MD[1,1]=omega[1]^2;
> KD[2,2]/MD[2,2]=omega[2]^2;
> KD[3,3]/MD[3,3]=omega[3]^2;
```

$$324.6979604 = 324.6979601$$

$$155.4958132 = 155.4958138$$

$$19.80622646 = 19.80622645$$

Ecuaciones en coordenadas normales:

```
> fu:=evalm(A &* f);
```

$$fu := [.4450418687\, p\sin(\Omega\, t),\ -.8019377339\, p\sin(\Omega\, t),\ 1.000000000\, p\sin(\Omega\, t)]$$

```
> ecn1:=MD[1,1]*diff(u[1](t),t$2)+CD[1,1]*diff( u[1](t),t)+KD[1,1]*u[1](t)=fu[1];
```

$$ecn1 := 1.841166394\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u_1(t)) + 1.563879225\,(\frac{\partial}{\partial t}\, u_1(t)) + 597.8229729\, u_1(t) = .4450418687\, p\sin(\Omega\, t)$$

```
> ecn2:=MD[2,2]*diff(u[2](t),t$2)+CD[2,2]*diff( u[2](t),t)+KD[2,2]*u[2](t)=fu[2];
```

$$ecn2 := 1.841166392\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u_2(t)) + .9408206093\,(\frac{\partial}{\partial t}\, u_2(t)) + 286.2936654\, u_2(t) = -.8019377339\, p\sin(\Omega\, t)$$

```
> ecn3:=MD[3,3]*diff(u[3](t),t$2)+CD[3,3]*diff( u[3](t),t)+KD[3,3]*u[3](t)=fu[3];
```

$$ecn3 := 1.841166399\,(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u_3(t)) + .4411663970\,(\frac{\partial}{\partial t}\,u_3(t)) + 36.46655865\,u_3(t) = 1.000000000\,p\sin(\Omega\,t)$$

la resolución se hace directamente mediante "dsolve":

```
> sol1:=dsolve({ecn1,D(u[1])(0)=0,u[1](0)=0}, {u[1](t)},method=laplace):
> sol2:=dsolve({ecn2,D(u[2])(0)=0,u[2](0)=0}, {u[2](t)},method=laplace):
> sol3:=dsolve({ecn3,D(u[3])(0)=0,u[3](0)=0}, {u[3](t)},method=laplace):
> assign({sol1,sol2,sol3});
> u[1](t):=subs(datos1,u[1](t));
```

$$u_1(t) := .8631021943\,10^{-5}\,e^{(-.4246979605\,t)}\cos(18.01437181\,t) - .0001738994681\,e^{(-.4246979605\,t)}\sin(18.01437181\,t) - .8631021943\,10^{-5}\cos(4.005376815\,t) + .0007830362533\sin(4.005376815\,t)$$

```
> u[2](t):=subs(datos1,u[2](t));
```

$$u_2(t) := -.00004583074788\,e^{(-.2554958132\,t)}\cos(12.46717831\,t) + .001002294519\,e^{(-.2554958132\,t)}\sin(12.46717831\,t) - .003122676001\sin(4.005376815\,t) + .00004583074788\cos(4.005376815\,t)$$

```
> u[3](t):=subs(datos1,u[3](t));
```

$$u_3(t) := -.1210762855\,e^{(-.1198062264\,t)}\sin(4.448805785\,t) + .03456067789\,e^{(-.1198062264\,t)}\cos(4.448805785\,t) - .03456067789\cos(4.005376815\,t) + .1355142078\sin(4.005376815\,t)$$

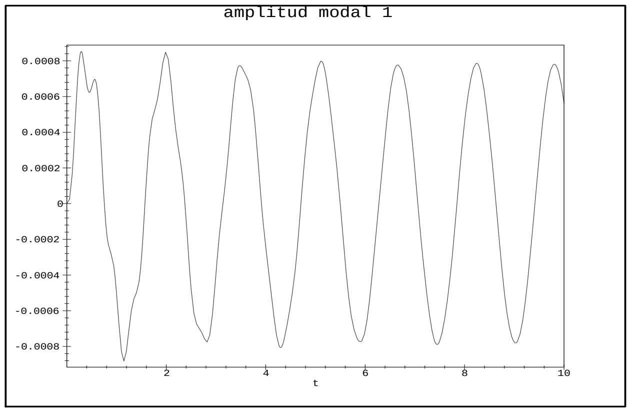
```
> assign(datos1):
```

dibujamos la amplitud modal del modo 1. El periodo vale $T.1 := \mathrm{evalf}(\frac{2\,\pi}{\omega_1})$
, y la fracción de amortiguamiento $\xi.1 := \frac{a.0}{2\,\omega_1} + \frac{a.1\,\omega_1}{2}$

$$T1 := .3486904785$$

$$\xi 1 := .02356895868$$

```
> plot(u[1](t),t=0..10,axes=BOXED,title=`amplit ud modal 1`);
```

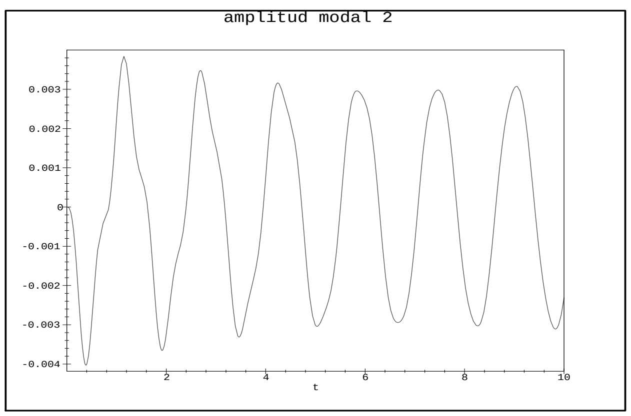


idem para el modo 1. El periodo vale $T.2 := \mathrm{evalf}(\frac{2\,\pi}{\omega_2})$, y la fracción de amortiguamiento $\xi.2 := \frac{a.0}{2\,\omega_2} + \frac{a.1\,\omega_2}{2}$

$$T2 := .5038723391$$

$$\xi 2 := .02048917341$$

```
> plot(u[2](t),t=0..10,axes=BOXED,title=`amplit ud modal 2`);
```



y por último para el modo 3 (periodo $T.3 := \mathrm{evalf}(\frac{2\,\pi}{\omega_3})$, y fracción de amortiguamiento $\xi.3 := \frac{a.0}{2\,\omega_3} + \frac{a.1\,\omega_3}{2}$). En este caso se observan dos fenómenos importantes. En primer lugar, una amplitud resonante mucho mayor que en los otros modos, debido a que la frecuencia de excitación está próxima a ω_3 , y en segundo lugar, al ser la respuesta suma de dos frecuencias próximas ($\Omega = .9\,\omega_3$ y ω_3), el movimiento resultante tiene una componente parásita de frecuencia la diferencia

($\Delta := \omega_3 - \Omega$) y periodo por tanto $T.0 := \mathrm{evalf}(\frac{2\,\pi}{\Delta})$, cuyo amortiguamiento es $\xi.0 := \frac{a.0}{2\,\Delta} + \frac{a.1\,\Delta}{2}$ (puede comprobarse que, de no existir amortiguamiento de masa, el amortiguamiento de esta frecuencia parásita sería muy bajo y habría que esperar un tiempo muy elevado hasta que se eliminase).

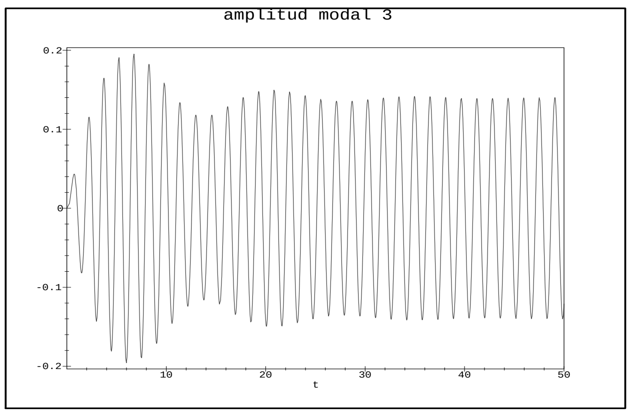
$$T3 := 1.411818922$$

$$\xi 3 := .02692021470$$

$$T0 := 14.11818923$$

$$\xi 0 := .2251430023$$

```
> plot(u[3](t),t=0..50,axes=BOXED,title=`amplit ud modal 3`);
```



Deshacemos el cambio para obtener ahora las gráficas en coordenadas geométricas:

```
> q:=evalm(transpose(A) &* [u[1](t),u[2](t),u[3](t)]);
```

$$\begin{aligned}
q := [&.6921542178\,10^{-5}\,\%3\cos(18.01437181\,t)\\
&- .0001394565454\,\%3\sin(18.01437181\,t) - .01534203945\cos(4.005376815\,t)\\
&+ .05781476657\sin(4.005376815\,t) - .00004583074788\,\%2\cos(12.46717831\,t)\\
&+ .001002294519\,\%2\sin(12.46717831\,t) - .05388401633\,\%1\sin(4.448805785\,t)\\
&+ .01538094866\,\%1\cos(4.448805785\,t), -.8631021943\,10^{-5}\,\%3\cos(18.01437181\,t)\\
&+ .0001738994681\,\%3\sin(18.01437181\,t) - .02768648421\cos(4.005376815\,t)\\
&+ .1065011993\sin(4.005376815\,t) - .00002039660160\,\%2\cos(12.46717831\,t)\\
&+ .0004460630239\,\%2\sin(12.46717831\,t) - .09709564243\,\%1\sin(4.448805785\,t)\\
&+ .02771551183\,\%1\cos(4.448805785\,t), .3841166134\,10^{-5}\,\%3\cos(18.01437181\,t)\\
&- .00007739254425\,\%3\sin(18.01437181\,t) - .03460127247\cos(4.005376815\,t)\\
&+ .1383668834\sin(4.005376815\,t) + .00003675340610\,\%2\cos(12.46717831\,t)\\
&- .0008037777953\,\%2\sin(12.46717831\,t) - .1210762855\,\%1\sin(4.448805785\,t)
\end{aligned}$$

$+ .03456067789\,\%1\cos(4.448805785\,t)]$

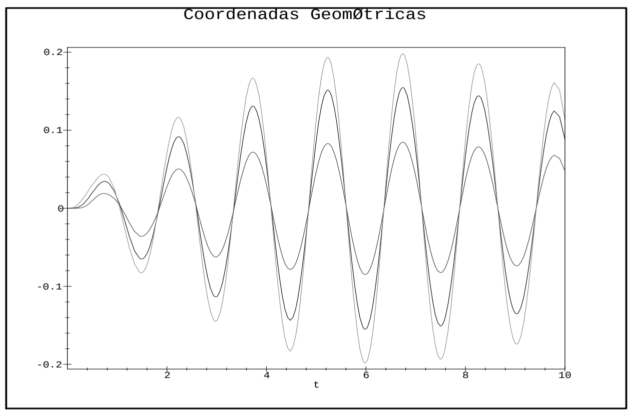
$\%1 := e^{(-.1198062264\,t)}$

$\%2 := e^{(-.2554958132\,t)}$

$\%3 := e^{(-.4246979605\,t)}$

En el dibujo de las coordenadas geométricas se ve la predominancia del modo 3 ya mencionada:

```
> plots[display](plot(q[1],t=0..10,color=red,ax es=BOXED),
> plot(q[2],t=0..10,color=blue,axes=BOXED),
> plot(q[3],t=0..10,color=green,axes=BOXED),
> title=`Coordenadas Geométricas`);
```



Comprobamos que se alcanza el régimen permanente, mirando una de las coordenadas:

```
> plot(q[3],t=0..50,axes=BOXED,title=`régimen permanente`);
```