Madrid, 14 de Marzo de 1997

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS
ANÁLISIS LINEAL

ELEMENTOS FINITOS MIXTOS (I): PROBLEMAS DE INCOMPRESIBILIDAD

Profesor:

Felipe Gabaldón

Dpto. Mecánica Medios Continuos y Teoría Estructuras

E. T. S. Ing. Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

INDICE

1. INTRODUCCION Y MOTIVACION

- Ciertas restricciones físicas conducen a situaciones de bloqueo de la formulación en desplazamientos. Ejemplos:
  - Elasticidad imcompresible.
  - Flexión de vigas y placas delgadas
- **Concepto:** La metodología de solución es minimizar la energía potencial total. Utilizar para ello el método de los elementos finitos ya introduce una restricción (se busca el mínimo para una cierta clase de desplazamientos, por ejemplo polinomios continuos a trozos). Si además existen restricciones adicionales de tipo físico, el sistema puede quedar con un exceso de restricciones que hagan que la única solución del sistema sea la nula.
- Ejemplos:
  - $\nu \to 0.5$ en deformación plana
  - $t \to 0$ en vigas y placas
- Pueden existir restricciones "escondidas": plasticidad con deformaciones plásticas de caracter isocórico.
- El problema debe plantearse introduciendo una incognita por cada ecuación de restricción.

2. ELEMENTOS ISOPARAMETRICOS

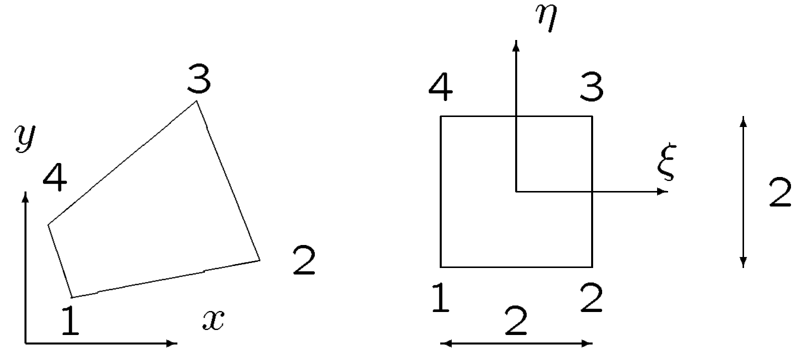
- Referencias

  1. THE FINITE ELEMENT METHOD. Linear static and dynamic finite element analysis. T.J.R. HUGHES. Prentice-Hall. 1987

  2. El método de los elementos finitos. Vol 1. O.C. ZIENKIEWICZ and R.L. TAYLOR. McGraw Hill-CIMNE. 1994

- Concepto: La geometría del elemento se interpola con las mismas funciones de forma con que se interpolan los desplazamientos.

Para el cuadrilátero de cuatro nodos:



- Interpolación:

$$x(\xi,\eta) = \sum_{I=1}^{4} x_I N_I$$

$$y(\xi,\eta) = \sum_{I=1}^{4} y_I N_I$$

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\eta) &= \sum_{I=1}^{4} u_I N_I \\
v(\xi,\eta) &= \sum_{I=1}^{4} v_I N_I
\end{aligned}
$$

con:

$$
N(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_I\xi)(1+\eta_I\eta)
$$

- Las funciones de forma así definidas tienen las siguientes propiedades:

  1. son continuas y derivables en Ω_e
  2. son continuas en la frontera de los elementos
  3. completitud: $u = c_0 + c_1 x + c_2 y$

- Jacobiano de la transformación isoparamétrica y derivadas de las funciones de forma.

  El jacobiano de la transformación al espacio isoparamétrico es:

$$
\boldsymbol{J}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{pmatrix}
$$

  siendo:

$$
x_{,\xi} = \sum_{I=1}^{4} x_I^e N_{I,\xi}
$$

$$
x_{,\eta} = \sum_{I=1}^{4} x_I^e N_{I,\eta}
$$

$$y_{,\xi} = \sum_{I=1}^{4} y_I^e N_{I,\xi}$$
$$y_{,\eta} = \sum_{I=1}^{4} y_I^e N_{I,\eta}$$

Un resultado útil para calcular las derivadas de las funciones de forma es:

$$\boldsymbol{J}^{-1}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{pmatrix} = \frac{1}{j} \begin{pmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{pmatrix}$$

con $j = \det\left[J(\xi,\eta)\right]$

Con estos resultados, es inmediato obtener:

$$\begin{aligned} N_{I,x} &= N_{I,\xi}\xi_{,x} + N_{I,\eta}\eta_{,x} \\ N_{I,y} &= N_{I,\xi}\xi_{,y} + N_{I,\eta}\eta_{,y} \end{aligned}$$

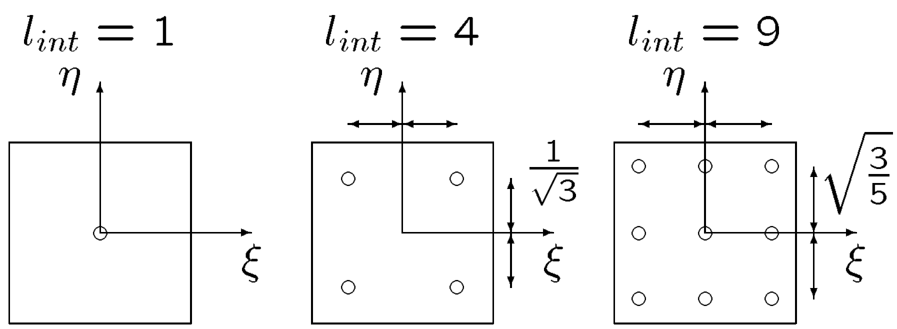
- Integración numérica

  Para la integración numérica se pueden emplear diversos tipos de cuadraturas:

  1. Regla trapezoidal
  2. Fórmula de Simpson
  3. Cuadratura de Gauss

  En el contexto de los elementos finitos, la más habitual es la cuadratura de Gauss:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\xi,\eta)d\xi d\eta = \sum_{l=1}^{n} W_l \; g(\tilde{\xi}_l, \tilde{\eta}_l)$$



$l_{int} = 1$
η
ξ
$l_{int} = 4$
η
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
ξ
$l_{int} = 9$
η
$\sqrt{\frac{3}{5}}$
ξ

3. EL FENOMENO DEL BLOQUEO

- Referencias:

  1. THE FINITE ELEMENT METHOD. Linear static and dynamic finite element analysis. T.J.R. HUGHES. Prentice-Hall. 1987

3.1. Elasticidad incompresible.

Ecuación constitutiva (medio elástico isótropo):

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)}$$

Si $\nu \to \frac{1}{2}$, entonces $\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \to \infty$

La formulación en este caso será:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)} \\ u_{i,i} &= 0 \end{aligned}$$

Formulación válida medios compresibles e incompresibles:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)} \\ u_{i,i} + \frac{p}{\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

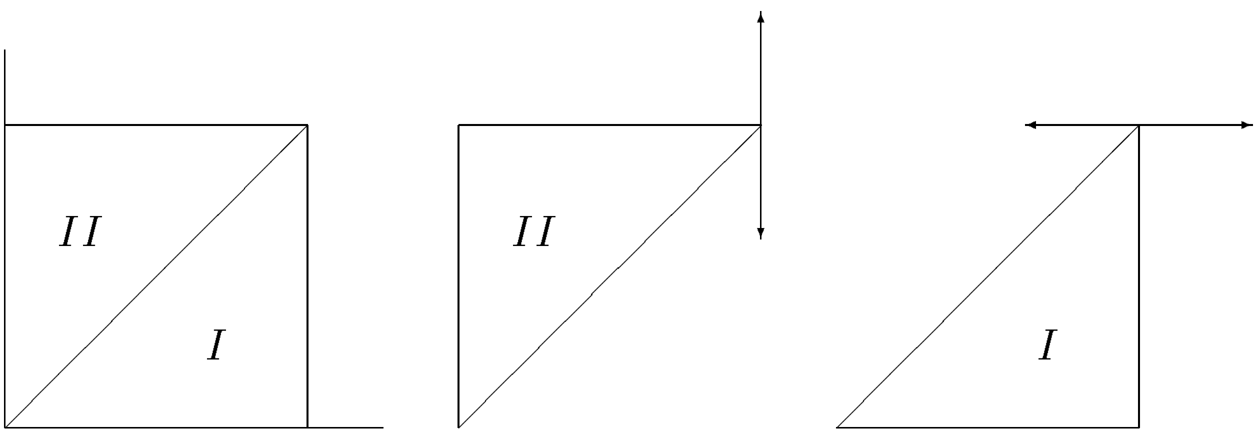
NOTA

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2} \Rightarrow p = -\frac{\sigma_{ii}}{3} \\ \nu &\approx \frac{1}{2} \Rightarrow p \approx -\frac{\sigma_{ii}}{3} \\ \nu &\neq \frac{1}{2} \Rightarrow p = -\lambda u_{i,i} \neq \frac{\sigma_{ii}}{3} \end{aligned}$$

Para triangulos lineales de presión constante, se tiene:

$$\int_\Omega q^h u^h_{i,i} d\Omega = 0 \ \ \forall q^h \text{cte en } \Omega_e \Rightarrow \int_\Omega u^h_{i,i} d\Omega = 0$$

es decir, los elementos no cambian de volumen



3.2 Flexión de vigas delgadas

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} + V &= \overline{m} \\ \frac{dV}{dx} + \overline{q} &= 0 \end{aligned}$$

- Viga de Timoshenko

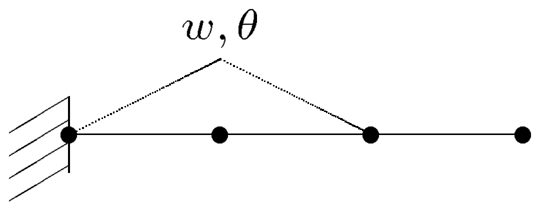
$$\begin{aligned} M &= EI\dot{\theta} \\ V &= GA(\theta - \dot{\omega}) \end{aligned}$$

  En el límite en que el espesor tiende a 0:

- Viga de Euler-Bernouilli

$$\begin{aligned} M &= EI\dot{\theta} \\ \theta &= \dot{\omega} \\ V &= \text{multiplicador de Lagrange} \end{aligned}$$

- Ejemplo



En el elemento 1: $\theta = \dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega(x) = \text{cte} = 0$
En el elemento 2, sucede lo mismo y en consecuencia no hay desplazamiento. Siguiendo el razonamiento con los siguientes elementos, la única solución es la nula.

- Se puede eliminar la rotación θ y el esfuerzo cortante V para llegar a la ecuación de la viga:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\frac{d^2\omega}{dx^2}\right] = \overline{q} - \dot{\overline{m}}$$

pero no es conveniente pues se trabaja con una ecuación de cuarto orden.

4. LA PRUEBA DE LA PARCELA

- Referencias:

  1. An engineer's defense of the patch test. B.M Irons and M. Loikkanen. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 19. pp 1391-1401. 1983
  2. The patch test - a condition for assesing FEM convergence. R.L. Taylor, J.C. Simo, O.C.Zienkiewicz and A.H.C.Chan. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 22. pp 39-62. 1986

- Introducida originalmente por Irons en 1965 y revisada posteriormente por Taylor et al. en 1986 (Individual patch test).

- Los estados de deformación constante (incluyendo movimientos de sólido rígido) han de ser representados de manera exacta.

- Ha de verificarse, en particular, para un solo elemento.

- Se debe probar sobre elementos distorsionados.

- En teoría solo necesita cumplirse en el límite en que $h \to 0$

- Permite conocer las singularidades de la matriz de rigidez. Es decir, sirve como chequeo de que no existen modos espureos de energía nula, garantizando la estabilidad numérica de la formulación.

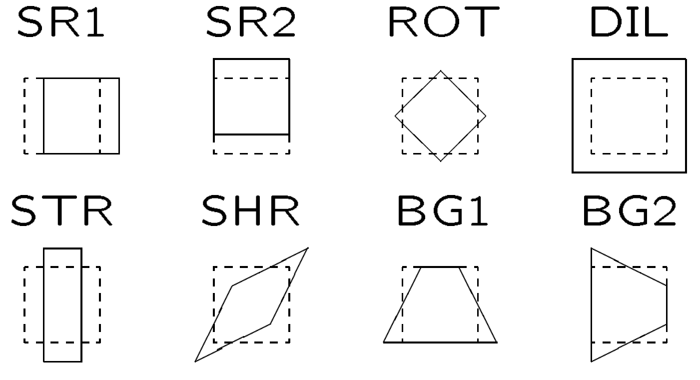
- Los modos de deformación constante y de sólido rígido son capturados de manera exacta por todos los elementos que pasan la prueba de la parcela. La diferencia entre los distintos elementos se encuentra en la rigidez de los modos de flexión.

- Los modos de flexión no han de tener rigidez infinita en el límite incompresible. Este es el problema que tiene la formulación en desplazamientos.

- Asimismo, dichos modos no han de tener rigidez nula. La formulación con integración reducida da lugar a modos espureos de flexión con energía nula $\rightarrow$ hourglassing.

Análisis modal de la matriz de rigidez

Modos de deformación:



Autovalores:

- SR1, SR2, SR3 son nulos.
- VOL, BG1, BG2 $\rightarrow \infty$, en el caso incompresible.
- BG1$= 0$, BG2$= 0$ con integración reducida.

Conclusiones

- El fenómeno del bloqueo aparece como consecuencia de una formulación numérica inadecuada que dá lugar a un problema con demasiadas restricciones. En concreto, dos defectos clave son la interpolación lineal de las respuestas volumétricas y de corte.

- El problema debe solucionarse modificando la formulación en los términos que dán lugar a los campos de deformaciones no constantes. La integración reducida elimina la parte no constante de las deformaciones en el elemento, pero dá lugar a modos espureos de energía nula.

5. SOLUCIONES

1. Métodos mixtos.
2. Integración selectiva y reducida.
3. Control de Hourglass
4. Formulación $\overline{\boldsymbol{B}}$
5. El método de los modos incompatibles
6. Formulación con deformaciones supuestas mejoradas

6. MÉTODOS MIXTOS

- Las referencias son muy abundantes

- Los métodos mixtos emplean diferentes interpolaciones para diferentes campos: desplazamientos-presión, desplazamientos-tensión, desplazamientos-deformación, etc.

- Para que una formulación mixta tenga garantizada la convergencia, ha de verificar la condición de Babuska-Brezzi (problema de checker-board).

- Los elementos de orden alto pierden robustez en problemas no lineales.

- No hay un “buen elemento” para todas las clases de problemas

- La formulación híbrida define campos en los bordes del elemento para imponer las condiciones de compatibilidad.

Planteamiento del problema de contorno

Dados $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$

encontrar $\boldsymbol{u}_i : \Omega \to R$, $p : \Omega \to R$

tal que:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} + f_i &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u_{i,i} + p/\lambda &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u_i &= g_i \quad \text{en } \partial_u\Omega \\ \sigma_{ij} n_j &= h_i \quad \text{en } \partial_t\Omega \end{aligned}$$

siendo

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu u_{(i,j)}$$

Planteamiento débil

Sean:

$$
\begin{aligned}
S_i &= \text{espacio de las soluciones de prueba (desplazamientos)}\\
\nu_i &= \text{espacio de las funciones de peso (desplazamientos)}\\
\mathcal{P} &= \text{espacio de las presiones}
\end{aligned}
$$

Dados f_i, g_i, h_i

encontrar $u_i \in S_i$ y $p \in \mathcal{P}$

tal que $\forall w_i \in \nu_i$, $q \in \mathcal{P}$, se verifique:

$$
\int_\Omega w_{(i,j)}\sigma_{ij} d\Omega - \int_\Omega q \left(u_{i,i} + \frac{p}{\lambda} \right) d\Omega
$$
$$
= \int_\Omega w_i f_i d\Omega + \int_{\partial\,\Omega} w_i h_i d\Gamma
$$

integrando por partes y aplicando el teorema de Gauss:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \int_\Omega w_i \left(\sigma_{ij,j} + f_i \right) d\Omega + \\
& \int_\Omega q \left(u_{i,i} + \frac{p}{\lambda} \right) d\Omega + \\
& \int_{\partial\,\Omega} w_i \left(h_i - \sigma_{ij} n_j \right) d\Gamma
\end{aligned}
$$

Aproximación de Galerkin

Sean:

S_i^h = aproximación del espacio de las soluciones de prueba (desplazamientos)
ν_i^h = aproximación del espacio de las funciones de peso (desplazamientos)
$\mathcal{P}^\langle$ = aproximación del espacio de las presiones

Dados $f_i,\ g_i,\ h_i$

encontrar $u_i^h \in S_i^h$ y $p \in \mathcal{P}^\langle$

tal que $\forall w_i^h \in \nu_i^h,\ q^h \in \mathcal{P}^\langle$, se verifique:

$$\int_\Omega w^h_{(i,j)} \sigma^h_{ij} d\Omega - \int_\Omega q^h \left(u^h_{i,i} + \frac{p^h}{\lambda} \right) d\Omega$$
$$= \int_\Omega w_i^h f_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} w_i^h h_i d\Gamma$$

integrando por partes y aplicando el teorema de Gauss:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_\Omega w_i^h \left(\sigma^h_{ij,j} + f_i \right) d\Omega + \\ & \int_\Omega q^h \left(u^h_{i,i} + \frac{p^h}{\lambda} \right) d\Omega + \\ & \int_{\partial\Omega} w_i^h \left(h_i - \sigma^h_{ij} n_j \right) d\Gamma + \\ & \text{terminos de continuidad de tracciones} \end{aligned}$$

Formulación matricial

- La interpolación de desplazamientos es la estándar
- La interpolación de presiones puede ser discontínua
- ¡ No todos los elementos funcionan !:

$$r = \frac{n_{eq}}{n_c}$$

$$\begin{array}{lll} r & = & 2 \quad \text{optimo} \\ r & > & 2 \quad \text{pocas restricciones de incompatibilidad} \\ r & < & 2 \quad \text{demasiadas restricciones de incompatibilidad} \\ r & \leq & 1 \quad \text{bloqueo severo} \end{array}$$

- Considerando que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega w^h_{(i,j)} \sigma^h_{ij} d\Omega &= \int_\Omega w^h_{(i,j)} \left(-p^h \delta_{ij} + 2\mu u^h_{(i,j)} \right) d\Omega \\ &= \int_\Omega w^h_{i,i} p^h d\Omega + \int_\Omega w^h_{(i,j)} 2\mu u^h_{(i,j)} d\Omega \end{aligned}$$

y haciendo las interpolaciones definidas por:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^h &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{w}^h &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{p}^h &= \boldsymbol{N}_p\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q}^h &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{q} \end{aligned}$$

para $\boldsymbol{w}$ y $\boldsymbol{q}$ arbitrarios se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{G}^\top & \boldsymbol{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{H} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}^e & \boldsymbol{g}^e \\ (\boldsymbol{g}^e)^\top & \boldsymbol{m}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}^e \\ \boldsymbol{p}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}^e \\ \boldsymbol{h}^e \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^e \boldsymbol{d}^e + \boldsymbol{g}^e \boldsymbol{p}^e &= \boldsymbol{f}^e && (1) \\ (\boldsymbol{g}^e)^\top \boldsymbol{d}^e + \boldsymbol{m}^e \boldsymbol{p}^e &= \boldsymbol{h}^e && (2) \end{aligned}$$

1. Caso compresible ($\lambda < \infty$; $\boldsymbol{m}^e \neq \boldsymbol{0}$)

   Se elimina $\boldsymbol{p}^e$ en (**??**), y se sustituye en (refeq1):

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{p}^e &= (\boldsymbol{m}^e)^{-1} \left[\boldsymbol{h}^e - (\boldsymbol{g}^e)^\top \boldsymbol{d}^e \right] \\ \tilde{\boldsymbol{k}}^e \boldsymbol{d}^e &= \tilde{\boldsymbol{f}}^e \end{aligned}$$

   con:

   $$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{k}}^e &= \boldsymbol{k}^e - \boldsymbol{g}^e (\boldsymbol{m}^e)^{-1} (\boldsymbol{g}^e)^\top \\ \tilde{\boldsymbol{f}}^e &= \boldsymbol{f}^e - \boldsymbol{g}^e (\boldsymbol{m}^e)^{-1} \boldsymbol{h}^e \end{aligned}$$

2. Caso incompresible ($\lambda \to \infty$; $\boldsymbol{m}^e = \boldsymbol{0}$)

   Se elimina $\boldsymbol{d}^e$ en (**??**)y se sustituye en (**??**):

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{d}^e &= (\boldsymbol{k}^e)^{-1} \left[\boldsymbol{f}^e - \boldsymbol{g}^e \boldsymbol{p}^e \right] && (3) \\ \boldsymbol{h}^e &= (\boldsymbol{g}^e)^\top (\boldsymbol{k}^e)^{-1} \left[\boldsymbol{f}^e - \boldsymbol{g}^e \boldsymbol{p}^e \right] && (4) \\ & && (5) \end{aligned}$$

   ahora en (**??**) se despeja $\boldsymbol{p}^e$ y se sustituye en (**??**) para obtener $\boldsymbol{d}^e$

7. INTEGRACIÓN SELECTIVA Y REDUCIDA

- Referencias

  1. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor and J.M.Too. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 3. pp 275-290. 1971

  2. Mixed finite element methods -reduced and selective integration techniques. D.S.Malkus and T.J.R.Hughes. Computer methods in applied mechanics and engineering. Vol 44. pp 63-81. 1978

- Concepto:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^e &= \int_\Omega \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} d\Omega \\
&= \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{D}_\lambda \boldsymbol{B} d\Omega}_{\text{Int. red: } 1\times1} + \underbrace{\int_\Omega \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{D}_\mu \boldsymbol{B} d\Omega}_{\text{Int. comp: } 2\times2}
\end{aligned}
$$

siendo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

- Formulación en desplazamientos.

- Teorema de equivalencia (Malkus-Hughes)

8. CONTROL DE HOURGLASS

- Referencias

  1. Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes. D.Kosloff and G.A. Frazier. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol 2. pp 57-72. 1978.

  2. Hourglass control in linear and nonlinear problems. T.Belytschko, J.S. Ong, W.K. Liu and J.M. Kennedy Computer methods in applied mechanics and engineering. Vol 43. pp 251-276. 1984

- Concepto: utilizar integración reducida añadiendo rigidez artificial a los modos de flexión.

- Utiliza parámetros escogidos "ad-hoc" para introducir la rigidez artificial.

- Es muy popular en los programas explícitos.

9. LA FORMULACIÓN $\overline{\boldsymbol{B}}$

- Referencias:

  1. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. Computer methods in applied mechanics and engineering. J.C.Nagtegaal, D.M.Parks and J.R.Rice. Vol 4. pp 153-178. 1974

  2. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and non linear media. T.J.R. Hughes. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 15. pp 1413-1418. 1980

- Concepto: $\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{d}$

- Ejemplo: elemento de 4 nodos bidimensional

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}^1, \boldsymbol{B}^2, \boldsymbol{B}^3, \boldsymbol{B}^4) \quad \boldsymbol{B}^A = \begin{pmatrix} N^A_{,1} & 0 \\ 0 & N^A_{,2} \\ N^A_{,2} & N^A_{,1} \end{pmatrix}$$

Se considera la descomposición aditiva de $\boldsymbol{B}$ en:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\mathsf{vol}} + \boldsymbol{B}_{\mathsf{dev}}$$

siendo:

$$\boldsymbol{B}^A_{\mathsf{vol}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} N^A_{,1} & N^A_{,2} \\ N^A_{,1} & N^A_{,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}_{\mathsf{dev}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_{dev}$$

Se define: $\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}_{\mathsf{vol}}|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{B}_{\mathsf{dev}}$