Madrid, 3 de Abril de 1997

MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS
ANÁLISIS LINEAL

ELEMENTOS FINITOS MIXTOS (II):

- EL MÉTODO DE LOS MODOS INCOMPATIBLES.

- FORMULACIONES CON DEFORMACIONES MEJORADAS SUPUESTAS.

Profesor:

Felipe Gabaldón

Dpto. Mecánica Medios Continuos y Teoría Estructuras

E. T. S. Ing. Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

INDICE

1. El MÉTODO DE LOS MODOS INCOMPATIBLES

- Referencias:

  1. Incompatible displacements models. E.L.Wilson, R.L.Taylor,W.P.Doherty and J.Ghaboussi Numerical and Computer Models in Structural Mechanics. 1973

  2. A non-conforming element for stress-analysis. R.L.Taylor, P.J.Beresford and E.L.Wilson Computer methods in applied mechanics and engineering. Vol 7. pp 1-16. 1976

- Concepto: añadir modos de flexión de orden cuadrático.

- Interpolación del campo de desplazamientos:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{A=1}^{4} N_A(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{d}_A + \sum_{I=1}^{2} \tilde{N}_I(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_I$$

  siendo:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \\ \tilde{N}_2(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2}(\eta^2 - 1) \end{aligned}$$

- Los $\boldsymbol{\alpha}_I$ son grados de libertad internos a nivel de cada elemento.

- Deformaciones: $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{\alpha}$

$$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{G}_1 \; \boldsymbol{G}_2] \qquad \boldsymbol{G}_I = \begin{pmatrix} \tilde{N}^I_{,1} & 0 \\ 0 & \tilde{N}^I_{,2} \\ \tilde{N}^I_{,2} & \tilde{N}^I_{,1} \end{pmatrix}$$

- Formulación variacional

$$\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_\Omega \delta\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{f} d\Omega + \int_{\partial_{\boldsymbol{t}}\Omega} \delta\overline{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{t} d\Omega \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \text{ admisible}$$

- Ecuaciones variacionales

$$\begin{aligned} \int_\Omega \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= \boldsymbol{f}_{\text{ext}} \\ \int_\Omega \boldsymbol{G}^\top \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

- Prueba de la parcela.

  Han de obtenerse tensiones constantes con desplazamientos lineales:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{d} = \text{constante} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$$

  sustituyendo en la ecuación variacional:

$$\boldsymbol{0} = \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{G}^{\top}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} d\Omega\right] \boldsymbol{d} = \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{G}^{\top} d\Omega\right] \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{G} d\Omega = \boldsymbol{0}$$

- El elemento original de Wilson no pasa la prueba de la parcela

- Taylor modifica los gradientes de los modos incompatibles:

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \tilde{N}^{I} = \frac{j_0}{j} \boldsymbol{J}_0^{-\top} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \tilde{N}^{I}$$

2. LA FORMULACIÓN DE DEFORMACIONES MEJORADAS SUPUESTAS

- Referencias:

  1. A class of mixed assumed methods and the method of incompatible modes. Simo J.C. and Rifai M.S. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 29. pp 1595-1638. 1990.

  2. Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. Simo J.C. and Armero F. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol 110. pp 359-386. 1993

  3. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems. Simo J.C., Armero F. and Taylor R.L. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol 110. pp 359-386. 1993.

- Objetivo: desarrollar un elemento de prestaciones similares al de Wilson-Taylor y que además tenga las características de:

  1. Formulación variacionalmente consistente

  2. Formulación sistemática de diversas familias de elementos

  3. Generalización para problemas con grandes deformaciones

- Concepto: el campo de deformaciones compatibles se mejora añadiendole un campo de deformaciones “mejoradas”:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{S}}\boldsymbol{u} + \tilde{\varepsilon}$$

- Funcional de Hu-Washizu

$$\begin{aligned}\Pi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\Omega} \left[W(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{s}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma\end{aligned}$$

- Ecuaciones variacionales:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{s}}(\delta\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \left[\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} \right] d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\sigma} : \left[\boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{s}}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon} \right] d\Omega &= 0\end{aligned}$$

- El funcional de Hu-Washizu con campos de deformaciones mejoradas:

$$
\begin{aligned}
\Pi(\boldsymbol{u}, \tilde{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) \;\; &= \;\; \int_\Omega \left[W(\boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{s}} \boldsymbol{u} + \tilde{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right] d\Omega \\
&\quad - \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} d\Omega - \int_{\partial\,\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma
\end{aligned}
$$

- Ecuaciones variacionales:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega (\boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{s}}(\delta \boldsymbol{u}) : \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_\Omega \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} d\Omega - \int_{\partial\,\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma \;\; &= \;\; 0 \\
\int_\Omega \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \left[\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\sigma} \right] d\Omega \;\; &= \;\; 0 \\
\int_\Omega \delta \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \;\; &= \;\; 0
\end{aligned}
$$

FORMULACION EN ELEMENTOS FINITOS

- Eliminación del campo de tensiones supuestas: los campos de tensiones supuestas se escogen para que sean ortogonales al campo de deformaciones mejoradas:

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\sigma}^h : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^h d\Omega = 0$$

De esta manera las ecuaciones variacionales se reducen a:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\nabla}^{s}(\delta \boldsymbol{u}) : \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{f} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega = 0$$

- Interpolación del campo de desplazamientos

$$\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}^{s}(\delta \boldsymbol{u}^h) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{d}$$

- Interpolación del campo de deformaciones mejoradas

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\alpha}_e$$

- No se requiere continuidad de $\boldsymbol{\alpha}_e$ entre elementos (¡y no hay crimen variacional!)

ECUACIONES DE ELEMENTOS FINITOS

Introduciendo las interpolaciones de elementos finitos en la forma débil de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{ext}} - \mathsf{A} \int_\Omega \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega &= 0 \\ \int_\Omega \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones están escritas en forma residual, apropiada para problemas no lineales. Particularizando para elasticidad lineal:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{C}\left(\mathrm{B}\boldsymbol{d} + \mathrm{G}\boldsymbol{\alpha}\right)$$

y sustituyendo en las ecuaciones de elementos finitos:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\left(\mathrm{K}_{e,11}\boldsymbol{d}_e + \mathrm{K}_{e,12}\boldsymbol{\alpha}_e\right) &= \boldsymbol{f}_{ext} \\ \mathrm{K}_{e,21}\boldsymbol{d}_e + \mathrm{K}_{e,22}\boldsymbol{\alpha}_e &= 0 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{e,11} &= \int_\Omega \mathrm{B}^\top \cdot \mathrm{C}_e^{(k)} \cdot \mathrm{B}\, d\Omega \\ \mathrm{K}_{e,12} &= \int_\Omega \mathrm{B}^\top \cdot \mathrm{C}_e^{(k)} \cdot \mathrm{G}\, d\Omega \\ \mathrm{K}_{e,21} &= \int_\Omega \mathrm{G}^\top \cdot \mathrm{C}_e^{(k)} \cdot \mathrm{B}\, d\Omega \\ \mathrm{K}_{e,22} &= \int_\Omega \mathrm{G}^\top \cdot \mathrm{C}_e^{(k)} \cdot \mathrm{G}\, d\Omega \end{aligned}$$

Observaciones:

- Si $\mathbf{C}$ es simétrica, $\mathrm{K}_{e,12} = \mathrm{K}_{e,21}$

- Las tensiones no aparecen en las ecuaciones. Esto es muy adecuado para problemas de plasticidad.

Condensación estática

A nivel de cada elemento se pueden eliminar los grados de libertad internos $\boldsymbol{\alpha}_e$:

$$\boldsymbol{\alpha}_e = -\mathrm{K}_{e,22}^{-1}\mathrm{K}_{e,21}\boldsymbol{d}_e$$

obteniendo:

$$\mathrm{K}^*\boldsymbol{d} = \boldsymbol{f}_{\text{ext}}$$

donde:

$$\mathrm{K}^* = \mathsf{A}\left(\mathrm{K}_{e,11} - \mathrm{K}_{e,12}\mathrm{K}_{e,22}^{-1}\mathrm{K}_{e,21}\right)$$

Metodología de diseño de elementos con deformaciones mejoradas

1. Definir en el espacio isoparamétrico una matriz de interpolación $\mathrm{E}(\boldsymbol{\xi})$, tal que el campo de deformaciones mejoradas tenga la expresión:

$$\tilde{\mathrm{E}}(\boldsymbol{\xi}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\alpha}_e \qquad \boldsymbol{\alpha}_e \in \mathcal{R}^n$$

2. Obtener la expresión de la matriz $\mathrm{G}(\boldsymbol{\xi})$ de interpolación del campo de deformaciones mejoradas en el espacio físico $\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$

$$\mathrm{G}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\xi})} \mathrm{F}_0^{-\mathrm{T}} \mathrm{E}(\xi)$$

- Elemento Q4/E4 (Wilson-Taylor)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \end{pmatrix}$$

- Elemento Q4/E5 (Simo-Rifai)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & \eta & 0 & 0 & -\xi\eta \\ 0 & 0 & \xi & \eta & \xi^2 - \eta^2 \end{pmatrix}$$

- Elemento Q4/E7 (Andelfinger-Ramm)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & \xi\eta \end{pmatrix}$$

Condiciones de convergencia

1. Las columnas de $\boldsymbol{G}$ han de ser linealmente independientes, para que

$$\mathrm{H}_e = \int_{\mathcal{B}} \mathrm{G}^{\top} \cdot \mathrm{C}_e \cdot \mathrm{G}\, d\Omega$$

sea invertible.

2. Prueba de la parcela (consistencia)

$$\int_{\mathcal{B}} \mathrm{G} d\Omega = \mathbf{0}$$

3. Estabilidad

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^h \cap \boldsymbol{\nabla}^{\mathsf{s}} \boldsymbol{u}^h = \emptyset$$

Implica que la matriz de rigidez condensada no tiene modos de energía nula (salvo, lógicamente, los correspondientes a movimientos de sólido rígido).