Apéndice A

Resumen de álgebra vectorial y tensorial

Se resumen aquí algunos conceptos y definiciones importantes de vectores y tensores, con pretensión de sencillez y brevedad. En aras de esta sencillez, nos limitaremos al espacio Euclídeo ordinario $\mathbb{E}^3$ y a coordenadas cartesianas.

A.1. Escalares, puntos y vectores

En lo que sigue restringiremos nuestra atención a los números reales $\mathbb{R}$ y el espacio geométrico ordinario $\mathbb{E}^3$, espacio afin de dimensión 3 y dotado de la métrica euclídea.

Los elementos $\alpha \in \mathbb{R}$ se denominan *escalares* y pueden considerarse como *tensores de orden cero.*

Los elementos $A \in \mathbb{E}^3$ se denominan *puntos.* El segmento orientado con origen en un punto A y final en otro B se denomina *vector*:

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB} = B - A. \tag{A.1}$$

El conjunto de los vectores, junto con las operaciones de suma de vectores mediante la regla del paralelogramo y producto por un escalar tiene la estructura de *espacio vectorial*, denominándose $\mathcal{V}$, espacio vectorial asociado a $\mathbb{E}^3$.

A.2. Producto escalar y vectorial

El módulo de un vector es la distancia entre los puntos origen y final del mismo, $|\boldsymbol{v}| = |\overrightarrow{AB}| = \operatorname{dist}(A, B)$. El producto escalar de dos vectores es un escalar $\in \mathbb{R}$, cuyo valor se define geométricamente como

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}| \cos\theta, \tag{A.2}$$

siendo θ el ángulo formado por $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$. Cuando el producto escalar de dos vectores es nulo ($\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) se dice que son *normales* o *perpendiculares*. El producto escalar es *conmutativo*, es decir,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{A.3}$$

A.3. Bases y coordenadas

El espacio vectorial euclídeo $\mathcal{V}$ tiene dimensión 3, es decir que se puede establecer una base de 3 vectores linealmente independientes $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ que permite expresar un vector cualquiera $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ como combinación lineal,

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \boldsymbol{e}_i. \tag{A.4}$$

Los coeficientes (v_1, v_2, v_3) se denominan coordenadas de $\boldsymbol{v}$ en la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Se puede escoger esta base de forma que sea *ortonormal*, es decir formada por vectores unitarios y mutuamente perpendiculares, verificándose

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}. \tag{A.5}$$

(Donde los coeficientes δ_{ij} ó *deltas de Kronecker* se definen por $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$).

En lo que sigue, salvo indicación expresa en contra, supondremos siempre bases ortonormales[1]. Se denomina *sistema de referencia cartesiano* al conjunto $\{O; \boldsymbol{e}_i\}$ formado por un punto $O \in \mathbb{E}^3$ y una base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ para el espacio vectorial asociado $\mathcal{V}$. De esta forma, las coordenadas cartesianas de un punto $X \in \mathbb{E}^3$ se definen como las coordenadas del vector $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i$.

En función de sus coordenadas en una base ortonormal, el producto escalar de dos vectores puede expresarse como

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_i v_i. \tag{A.6}$$

[1] Esta restricción da lugar a los denominados *tensores cartesianos*.

En esta fórmula y en lo que sigue, con objeto de simplificar la notación, siempre que en un monomio haya un índice repetido dos veces se entenderá que la expresión se suma sobre el rango del índice, salvo que se indique expresamente lo contrario.

Mediante el producto escalar se puede asociar a un vector cualquiera $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$ una aplicación lineal $\boldsymbol{v}^\flat : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, de forma que le haga corresponder su producto escalar por $\boldsymbol{v}$:

$$\mathcal{V} \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}. \tag{A.7}$$

Esta propiedad permite identificar los vectores como *tensores de orden uno*.

A.4. Tensores de orden dos

Se denomina *tensor de orden dos* sobre un espacio vectorial $\mathcal{V}$ a una aplicación lineal $\boldsymbol{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, de forma que

$$\mathcal{V} \ni \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{A.8}$$

La linealidad se traduce en las propiedades siguientes

1. $\boldsymbol{T} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$
2. $\boldsymbol{T} \cdot (\alpha \boldsymbol{u}) = \alpha(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}$

El conjunto de tensores de orden dos sobre $\mathcal{V}$ se denota por $\mathcal{V}^2$. Se define el *tensor nulo* $\boldsymbol{O} \in \mathcal{V}^2$ por $\boldsymbol{O} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$, y el *tensor identidad o unidad* $\boldsymbol{1} \in \mathcal{V}^2$ por $\boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$.

Además, en $\mathcal{V}^2$ se definen las propiedades y operaciones siguientes.

1. *Igualdad.* Dos tensores $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^2$ son iguales si y sólo si

$$\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{A.9}$$

2. *Suma.* Dados $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^2$ la suma $\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^2$ se define por

$$(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \tag{A.10}$$

3. *Producto por un escalar.* Dado $\boldsymbol{S} \in \mathcal{V}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el producto $\alpha \boldsymbol{S} \in \mathcal{V}^2$ por

$$(\alpha \boldsymbol{S}) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \tag{A.11}$$

4. *Producto o composición de tensores.* Dados $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^2$ se define el producto $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T} \in \mathcal{V}^2$ por

$$(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{S} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V} \tag{A.12}$$

Con estas definiciones, es fácil comprobar que la suma de tensores es conmutativa y asociativa, así como el producto por un escalar. Asimismo, el producto por un escalar y el producto de tensores son distributivos respecto de la suma.

Se definen las *componentes de un tensor* $\boldsymbol{S}$ en una base cualquiera $\{\boldsymbol{e}_i\}$ como los coeficientes escalares

$$S_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}_j) \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{A.13}$$

Por tanto, la expresión en componentes de la aplicación de un tensor sobre un vector es

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad v_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{S} \cdot u_j \boldsymbol{e}_j) = S_{ij} u_j. \tag{A.14}$$

Las componentes de un tensor se pueden escribir en forma de matriz,

$$[\boldsymbol{S}] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix}, \tag{A.15}$$

indicando el primer índice fila y el segundo columna de la matriz. Nótese que para diferenciar la matriz de componentes del tensor respecto del tensor mismo se emplea la notación $[\boldsymbol{S}]$ en lugar de $\boldsymbol{S}$. La definición de un tensor es intrínseca, independiente de la base, mientras que sus componentes son distintas según la base elegida.

Análogamente, escribiremos las componentes de un vector $\boldsymbol{v}$ en una base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ mediante una matriz columna $\{\boldsymbol{v}\}$ (el empleo de llaves indicará la estructura de matriz columna). La traspuesta de ésta será una matriz fila, que denotaremos por $\|\boldsymbol{v}\| = \{\boldsymbol{v}\}^{\mathrm{T}}$ (el empleo de doble barra vertical indicará la estructura de matriz fila):

$$\{\boldsymbol{v}\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}; \qquad \|\boldsymbol{v}\| = \{\boldsymbol{v}\}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

De esta forma, en una base dada, el producto de tensores se traduce en el correspondiente producto de matrices,

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T} \quad \Rightarrow \quad U_{ij} = S_{ik} T_{kj} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{U}] = [\boldsymbol{S}][\boldsymbol{T}]. \tag{A.17}$$

Por otra parte, el desarrollo de un vector en función de los vectores de la base puede expresarse mediante la matriz formada por estos últimos,

$$\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i = \left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\right) \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \{\boldsymbol{e}_i\}^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{v}\}. \tag{A.18}$$

El *producto tensorial* (también llamado diádico) de dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se define como un tensor de orden dos, de acuerdo a

$$(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}. \tag{A.19}$$

La expresión en componentes es

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad u_i = a_i b_j v_j. \tag{A.20}$$

Las componentes del tensor $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ son

$$[\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}]_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot ((\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_j)) = a_i b_j, \tag{A.21}$$

lo que en expresión matricial es

$$[\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{a}\}\{\boldsymbol{b}\}^{\mathrm{T}}. \tag{A.22}$$

Mediante el producto tensorial de los vectores de la base, se puede escribir el desarrollo de un tensor en función de sus componentes,

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j. \tag{A.23}$$

A.5. Cambio de base

Establezcamos un cambio de base, desde $\{\boldsymbol{e}_i\}$ a una nueva base $\{\boldsymbol{e}'_i\}$, ambas ortonormales. El cambio se puede caracterizar mediante un tensor $\boldsymbol{A}$ que transforma los vectores de la antigua base en los de la nueva:

$$\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_i. \tag{A.24}$$

Desarrollando las componentes de los nuevos vectores $\boldsymbol{e}'_i$ en la base $\boldsymbol{e}_i$,

$$\boldsymbol{e}'_i = (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_i)\boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{e}_j \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_i))\, \boldsymbol{e}_j = A_{ji} \boldsymbol{e}_j. \tag{A.25}$$

Empleando la matriz de coordenadas $[\boldsymbol{A}] = [A_{ij}]$ en la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$, esta relación puede formularse matricialmente como

$$\left(\boldsymbol{e}'_1 \quad \boldsymbol{e}'_2 \quad \boldsymbol{e}'_3\right) = \left(\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3\right) [\boldsymbol{A}] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{Bmatrix}. \tag{A.26}$$

Las componentes de $[\boldsymbol{A}]$ tienen el significado siguiente:

$$A_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'_j. \tag{A.27}$$

Asimismo, puede obtenerse una expresión directa del tensor de cambio mediante:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{e}'_k \otimes \boldsymbol{e}_k. \tag{A.28}$$

Veamos ahora la propiedad de *ortogonalidad* de la matriz de cambio. Para ello, comenzamos por expresar los vectores de la base antigua ($\boldsymbol{e}_j$) en la nueva base,

$$\boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}'_i)\boldsymbol{e}'_i = A_{ji}\boldsymbol{e}'_i. \tag{A.29}$$

Si sustituimos esta expresión en (A.25) resulta

$$\boldsymbol{e}'_i = A_{ji}A_{jk}\boldsymbol{e}'_k \tag{A.30}$$

(habiendo sustituido el índice mudo i de (A.29) por k). De esta forma se deduce inmediatamente la condición que deben cumplir las componentes del tensor de cambio de base,

$$\delta_{ik} = A_{ji}A_{jk} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}] = [\mathbf{1}]. \tag{A.31}$$

Esta propiedad, obtenida basándose en la ortonormalidad de ambas bases, caracteriza la matriz de cambio de base como *matriz ortogonal*:

$$[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{A}]^{-1}. \tag{A.32}$$

Veamos ahora la transformación de coordenadas de un vector, al cambiar a la nueva base:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_i\boldsymbol{e}_i \\ &= v'_j\boldsymbol{e}'_j = v'_j A_{ij}\boldsymbol{e}_i; \end{aligned} \tag{A.33}$$

luego

$$v_i = A_{ij}v'_j \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{v}\} = [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{v}\}' \tag{A.34}$$

$$v'_j = A_{ij}v_i \quad \Rightarrow \quad \{\boldsymbol{v}\}' = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{v}\} \tag{A.35}$$

A.6. Operaciones y clases especiales de tensores

Dado un tensor $\boldsymbol{S}$ definimos su *traspuesto*, $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$, como otro tensor que verifica

$$(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{v}) \qquad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}. \tag{A.36}$$

Decimos que un tensor $\boldsymbol{S}$ es *simétrico* si $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}$, mientras que será *hemisimétrico* si $\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{S}$.

Un tensor $\boldsymbol{S}$ admite *inverso* si existe otro tensor $\boldsymbol{S}^{-1}$ tal que

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{S} = \mathbf{1}. \tag{A.37}$$

Decimos que un tensor $\boldsymbol{Q}$ es *ortogonal* si $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}^{-1}$, es decir,

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q} = \mathbf{1}. \tag{A.38}$$

El tensor $\boldsymbol{A}$ que define un cambio entre bases ortonormales, teniendo en cuenta (A.31), es un tensor ortogonal:

$$[\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}] = [\mathbf{1}] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A} = \mathbf{1}. \tag{A.39}$$

Un tensor ortogonal $\boldsymbol{A}$ se denomina *rotación* si en el cambio de base asociado a partir de un triedro a derechas (es decir, que verifica $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$) se obtiene otro triedro a derechas. Más abajo (apartado A.11) veremos que una condición equivalente es que su determinante debe valer $+1$.

A.7. Cambio de coordenadas de un tensor

Sea un cambio de base definido por las expresiones tensoriales $\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i$ $(i = 1,\dots 3)$, o de forma equivalente, por las expresiones algebraicas $\boldsymbol{e}'_i = A_{ji}\boldsymbol{e}_j$. Un tensor $\boldsymbol{T}$ define una aplicación lineal en $\mathcal{V}$,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}, \tag{A.40}$$

que expresada en unas u otras coordenadas resulta en las siguientes expresiones matriciales:

$$\{\boldsymbol{v}\} = [\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{u}\}, \qquad \{\boldsymbol{v}\}' = [\boldsymbol{T}]'\{\boldsymbol{u}\}'. \tag{A.41}$$

Teniendo en cuenta las relaciones de cambio de coordenadas para los vectores, (A.34, A.35):

$$\{\boldsymbol{v}\}' = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{v}\} = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{T}]\{\boldsymbol{u}\} = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{u}\}'; \tag{A.42}$$

por lo que

$$[\boldsymbol{T}]' = [\boldsymbol{A}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{T}][\boldsymbol{A}] \quad \Leftrightarrow \quad T'_{ij} = T_{kl}A_{ki}A_{lj}. \tag{A.43}$$

A.8. Coeficientes de permutación

Se definen a partir de los vectores de una base ortonormal $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ mediante la expresión general siguiente:

$$\epsilon_{ijk} = (\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k. \tag{A.44}$$

Desarrollando la expresión, comprobamos que su valor es $+1$, -1 ó 0 según el caso:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si la permutación } (i,j,k) \text{ es par:} \\ & (1,2,3),\ (2,3,1) \text{ ó } (3,1,2); \\ -1 & \text{si la permutación } (i,j,k) \text{ es impar:} \\ & (1,3,2),\ (2,1,3) \text{ ó } (3,2,1); \\ 0 & \text{si en } (i,j,k) \text{ algún índice está repetido.} \end{cases} \tag{A.45}$$

Se comprueba fácilmente la propiedad de hemisimetría para los coeficientes,

$$\epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}; \quad \epsilon_{ikj} = -\epsilon_{ijk}. \tag{A.46}$$

A partir de (A.44) se deduce inmediatamente que $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$, por lo que el producto vectorial de dos vectores cualesquiera será

$$\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} = \epsilon_{ijk}\, u_i v_j \boldsymbol{e}_k. \tag{A.47}$$

Análogamente, el producto mixto de tres vectores vale

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \epsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k. \tag{A.48}$$

Los coeficientes hemisimétricos ϵ_{ijk} corresponden a las coordenadas de un *tensor de orden tres*, aunque no entraremos en más detalles sobre este aspecto.

A.9. Forma cuadrática asociada a un tensor

Un tensor de orden 2 cualquiera $\boldsymbol{T}$ define una forma cuadrática asociada, $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, de forma que

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}. \tag{A.49}$$

Esta forma cuadrática es bilineal, es decir, lineal en cada uno de sus dos argumentos. Decimos que el tensor $\boldsymbol{T}$ es *definido positivo* si la forma cuadrática asociada lo es, es decir,

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}) > 0 \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{V},\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}. \tag{A.50}$$

Análogamente, cabría definir los conceptos de tensor *definido negativo*, *semidefinido negativo*, *semidefinido positivo* e *indefinido*.

A.10. Vector axial asociado a un tensor hemisimétrico

La forma cuadrática asociada a un tensor hemisimétrico es igualmente *hemisimétrica*:

$$\text{si} \quad \boldsymbol{T} = -\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}) \quad \forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathcal{V}. \tag{A.51}$$

Particularizando esta propiedad para los vectores de la base ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$), deducimos que la matriz de coordenadas es también hemisimétrica:

$$T_{ij} = -T_{ji} \qquad \forall i, j = 1, 2, 3. \tag{A.52}$$

Una propiedad importante de un tensor hemisimétrico es que existe siempre un *vector axial asociado*, que lo hace equivalente a un producto vectorial:

$$\boldsymbol{W}\in\mathcal{V}^2,\ \boldsymbol{W} = -\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{w}\in\mathcal{V},\ \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}\wedge\boldsymbol{x}\ \ \forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{V}. \tag{A.53}$$

Desarrollando las componentes de esta expresión,

$$W_{ki}x_i\boldsymbol{e}_k = \epsilon_{ijk}w_ix_j\boldsymbol{e}_k, \tag{A.54}$$

e igualando éstas,

$$\underbrace{\epsilon_{ijk}w_ix_j}_{=\epsilon_{jik}w_jx_i} = W_{ki}x_j, \tag{A.55}$$

por lo que

$$W_{ij} = w_k\epsilon_{kji}. \tag{A.56}$$

Asimismo, se puede invertir esta relación para obtener

$$w_i = \frac{1}{2}\epsilon_{jik}W_{jk}. \tag{A.57}$$

El tensor hemisimétrico asociado a un vector $\boldsymbol{w}$ lo denominaremos también $\widehat{\boldsymbol{w}}$, ó $\boldsymbol{w}\wedge$. La equivalencia es por tanto

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{w}\wedge = \widehat{\boldsymbol{w}} \tag{A.58}$$

$$\Updownarrow$$

$$\{\boldsymbol{w}\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}, \quad [\boldsymbol{W}] = [\widehat{\boldsymbol{w}}] = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.59}$$

A.11. Traza y determinante

La *traza* es una operación tensorial lineal que asocia a un tensor de orden dos un escalar. Aplicada al producto tensorial de dos vectores, cumple

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}. \tag{A.60}$$

Por tanto, para los vectores de la base —ortonormal—,

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}, \tag{A.61}$$

y aplicando esta expresión en el desarrollo de un tensor $\boldsymbol{T}$,

$$\mathrm{tr}\, \boldsymbol{T} = \mathrm{tr}(T_{ij}\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}. \tag{A.62}$$

Conviene recalcar que, al tratarse de una operación tensorial intrínseca, el resultado es independiente del sistema de coordenadas en el que se calcule. Por este motivo se dice que la traza es un *invariante* del tensor.

El *determinante* de un tensor es un escalar cuyo valor coincide con el determinante de la matriz de componentes asociada en una base dada.

$$\det \boldsymbol{T} = \det[\boldsymbol{T}]. \tag{A.63}$$

En función de los coeficientes de permutación puede expresarse como

$$\det \boldsymbol{T} = \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{3k} = \epsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{k3}. \tag{A.64}$$

Se trata igualmente de una operación tensorial intrínseca, por lo que el resultado es el mismo independientemente de la base empleada para calcular las coordenadas. Es por tanto otro *invariante* del tensor.

El determinante tiene las propiedades siguientes.

1. Un tensor cuyo determinante es no nulo posee siempre inverso:

$$\det \boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \exists \boldsymbol{T}^{-1} \mid \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{1}. \tag{A.65}$$

2. El determinante de un producto de tensores es el producto de los determinantes,

$$\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) \det(\boldsymbol{B}) \tag{A.66}$$

3. El determinante del tensor identidad vale 1, y el del inverso de un tensor es el inverso del determinante,

$$\det \boldsymbol{1} = 1, \quad \det \boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{T}}. \tag{A.67}$$

4. El determinante del traspuesto de un tensor es igual al determinante del tensor original,
$$\det\left(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\boldsymbol{T}\right) \tag{A.68}$$

5. El determinante de un tensor ortogonal vale ± 1,
$$1 = \det(\mathbf{1}) = \det\left(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\right) = (\det \boldsymbol{R})^2 \quad \Rightarrow \quad \det \boldsymbol{R} = \pm 1. \tag{A.69}$$

Se dice que un tensor ortogonal corresponde a una *rotación propia* (ver apartado A.6) cuando su determinante vale $+1$. En este caso puede comprobarse que un triedro a derechas es transformado siempre en otro triedro a derechas.