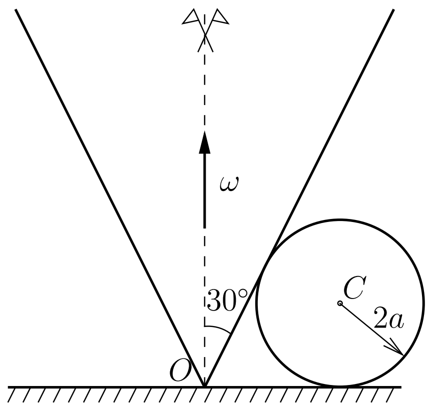
Mecánica

EXAMEN FINAL (22 de junio del 2009)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Un cono de revolución de semiángulo 30° gira alrededor de su eje con velocidad angular constante ω en el sentido indicado en la figura, que muestra una sección principal. A su vez, un plano perpendicular al eje del cono por su vértice O gira alrededor de dicho eje con velocidad angular constante 2ω en el mismo sentido que el cono. Una esfera de radio $2a$ se mueve permaneciendo tangente en todo momento al cono y al plano definidos anteriormente, de manera que rueda sin deslizar sobre ambas superficies y su centro C describe una circunferencia alrededor del eje del cono con velocidad constante $v = 5/2\sqrt{3}a\omega$, en el mismo sentido de giro que el cono y el plano. Se pide:



1. Describir el movimiento de la esfera y discutir si se puede interpretar como una rotación instantánea. Calcular la velocidad angular de la esfera y en su caso el eje instantáneo de rotación.

2. Aceleración angular de la esfera.

---

1. Dado que la esfera rueda sin deslizar sobre el cono y sobre el plano, la velocidad de los puntos de la esfera en contacto con ambas superficies son iguales que los puntos correspondientes del cono y del plano. Las velocidades de estos puntos son perpendiculares a la sección mostrada en la figura estando, en consecuencia, la velocidad angular contenida en el plano de dicha sección. Como la proyección de las velocidad de cualquiera de dichos puntos de la esfera sobre el vector velocidad angular es cero, el movimiento corresponde a una rotación instantánea.

Consideraremos unos ejes auxiliares con origen en el vértice del cono O, tal que Ox está en el plano que gira con velocidad angular 2ω, Oz coincide con el eje de revolución del cono, y el centro de la esfera C está contenido en todo momento en el plano Oxz.

Sean A y B los puntos de la esfera en contacto con el plano y el cono, respectivamente. Por rodar sin deslizar sobre ambas superficies, y teniendo en cuenta que:

$$\boldsymbol{OA} = 2\sqrt{3}a\boldsymbol{i} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{OB} = \sqrt{3}a\boldsymbol{i} + 3a\boldsymbol{k} \tag{2}$$

se tiene que:

$$\boldsymbol{v}_A = 4\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{j}; \qquad \boldsymbol{v}_B = \sqrt{3}a\omega\boldsymbol{j} \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{j}$ el versor unitario perpendicular al plano Oxz, que pertenece al triedro dextrógiro $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$

Llamando $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x\boldsymbol{i} + \Omega_z\boldsymbol{k}$ a la velocidad angular de la esfera, y planteando la expresión del campo de velocidades entre los puntos A y B de la misma:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AB} \tag{4}$$

de la componente en $\boldsymbol{j}$ de esta ecuación se obtiene

$$3\Omega_x + \sqrt{3}\Omega_z = 3\sqrt{3}\omega \tag{5}$$

Por otra parte, dado que $\boldsymbol{v}_C = 5/2\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{j}$, planteando la expresión del campo de velocidades entre los puntos A y C (con $\boldsymbol{AC} = 2a\boldsymbol{k}$), de la componente en $\boldsymbol{j}$ se obtiene:

$$\Omega_x = \frac{3\sqrt{3}}{4}\omega \tag{6}$$

y sustituyendo este resultado en (5):

$$\Omega_z = \frac{3}{4}\omega \tag{7}$$

La velocidad angular de la esfera resulta entonces:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{i} + \frac{3}{4}\boldsymbol{k}\right)\omega \tag{8}$$

Dado que el eje instantáneo de rotación lleva la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$, para tenerlo definido basta con encontrar ahora las coordenadas de un punto P del mismo contenido en el plano Oxz. Particularizando, por ejemplo, para el punto del eje situado en el eje de revolución ($x_P = y_P = 0$) e imponiendo que la velocidad de P es nula:

$$\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AP} = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

De esta expresión se obtiene:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}z_P + \frac{5\sqrt{3}}{2}a = 0 \tag{10}$$

resultando:

$$z_P = \frac{10}{3}a \tag{11}$$

En consecuencia, el eje instantáneo de rotación es la recta contenida en el plano Oxz que pasa por el punto del eje de revolución del cono situado a una distancia $10a/3$ sobre su vértice, y forma $60°$ con dicho eje.

2. Para que el plano Oxz del sistema de referencia definido en el apartado anterior contenga en todo momento al centro C de la esfera, aquel ha de girar con una velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \frac{v_C}{|\boldsymbol{OA}|}\boldsymbol{k} = \frac{5}{4}\omega\boldsymbol{k} \tag{12}$$

Derivando en el sistema móvil $Oxyz$ el vector velocidad angular de la esfera, y teniendo en cuenta que éste es constante en dicho sistema móvil:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \wedge \boldsymbol{\Omega} = \frac{15\sqrt{3}}{16}\omega^2\boldsymbol{j} \tag{13}$$