Mecánica

EXAMEN FINAL (22 de junio del 2009)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 4.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Se considera una peonza simétrica pesada cuya forma es un cono de revolución con radio de la base b, altura $4b/3$ y masa m. Se pone en movimiento con su vértice Q sobre un plano horizontal OXY, comunicándose a dicho vértice una trayectoria impuesta sobre una circunferencia horizontal fija con centro en O y radio a, con velocidad angular ω_0 constante. Se pide:

1. Definir los grados de libertad del sistema y obtener en función de los mismos y sus derivadas la expresión del momento cinético del sólido en Q.
2. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Estudiar la posibilidad de un movimiento con velocidad de precesión constante ω_0 y nutación constante θ_0, estando inicialmente el eje del cono en el plano OXZ.

NOTA: Los momentos de inercia principales de un cono de revolución sólido con base b y altura h en su centro de masa G son $I_{Gxx} = I_{Gyy} = \frac{3}{80}m(h^2+4b^2)$ e $I_{Gzz} = \frac{3}{10}mb^2$.

1.— Se trata de un sólido con un movimiento general alrededor de uno de sus puntos Q cuyo movimiento está prescrito y definido. Por tanto, el movimiento del sólido queda definido por el movimiento relativo a dicho punto, y puede definirse mediante los tres ángulos de Euler: ψ (precesión), θ (nutación) y φ (rotación propia).

El momento cinético en Q, considerando el movimiento del sólido relativo al punto Q, se obtiene como $\boldsymbol{H}_Q^{SQ} = \boldsymbol{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}$. En esta expresión el superíndice SQ indica que las velocidades son relativas al movimiento de Q, como veremos más adelante la forma más conveniente de expresar las ecuaciones de la dinámica será en este sistema móvil (no inercial) SQ. La expresión del momento cinético con las velocidades absolutas sería $\boldsymbol{H}_Q = \boldsymbol{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{r}_{QG} \wedge M\boldsymbol{v}_Q$. Obtendremos en primer lugar el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_Q$, en las direcciones principales formadas por los ejes ligados al cono $Qxyz$, siendo z la dirección del eje de revolución y (x, y) dos direcciones normales dentro del plano normal al mismo. Al tratarse de un sólido de revolución, el tensor de inercia será cilíndrico, $[\boldsymbol{I}_Q] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$. Aplicando el teorema de Steiner:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{80}m(h^2+4b^2) + m\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{20}m(4h^2+b^2) = \frac{73}{60}mb^2\,; \\ C &= I_{Qzz} = I_{Gzz} = \frac{3}{10}mb^2\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Por otra parte resulta conveniente en este caso emplear el sistema de referencia denominado *triedro intermedio*, que coincide con el triedro del cuerpo salvo en la rotación propia alrededor de Qz. Dicho de otra manera, sería el triedro obtenido aplicando únicamente las rotaciones elementales de precesión y nutación. Los vectores unitarios del triedro intermedio se denominan $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})$, siendo $\boldsymbol{k}$ la dirección del eje del cono, $\boldsymbol{u}$ paralelo a un diámetro horizontal de la base y $\boldsymbol{v}$ paralelo a un diámetro de máxima pendiente de la base. En este triedro las componentes del tensor de inercia son las mismas (1) y el tensor sigue siendo cilíndrico. Teniendo en cuenta que el vector unitario vertical se expresa como $\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{v} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}$, la velocidad de rotación es

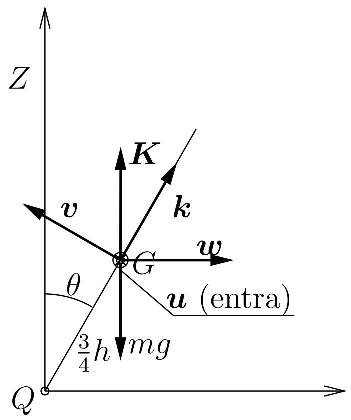
$$\boldsymbol{\Omega} = \dot\psi\,\boldsymbol{K} + \dot\theta\,\boldsymbol{u} + \dot\varphi\,\boldsymbol{k} = \dot\theta\,\boldsymbol{u} + \dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{v} + (\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{k}\,. \tag{2}$$

Por tanto, la expresión del momento cinético es

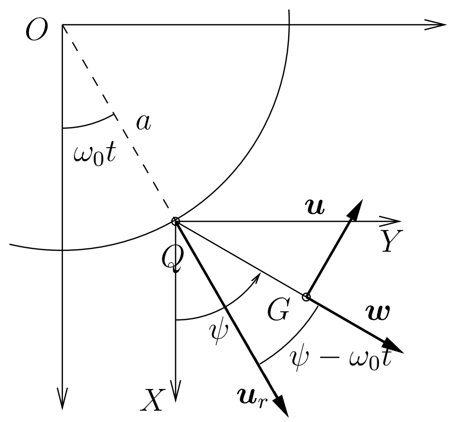
$$\boxed{\boldsymbol{H}_Q^{SQ} = \boldsymbol{I}_Q\cdot\boldsymbol{\Omega} = A\dot\theta\,\boldsymbol{u} + A\dot\psi\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{v} + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\boldsymbol{k}\,.} \tag{3}$$

2.— El movimiento relativo a Q es el de un sólido con un punto fijo. Al tener este punto un movimiento impuesto con aceleración no nula se trata de un sistema no inercial. Sin embargo, el efecto debido al movimiento de un punto es sencillo de tener en cuenta, considerando simplemente una fuerza de inercia debida a la aceleración de arrastre $-m\ddot{\boldsymbol{r}}_Q$. Por ello, podremos aplicar las ecuaciones del movimiento de la peonza simétrica con un punto fijo, tan solo añadiendo el efecto de esta fuerza de inercia. La ecuación vectorial de la dinámica se plantea mediante un momento total $\boldsymbol{M}_Q^*$ que incluye un sumando debido a la fuerza física (peso $-mg\,\boldsymbol{K}$) y otro debido a la fuerza de inercia $(-m\,\ddot{\boldsymbol{r}}_Q)$:

$$\boldsymbol{M}_Q^* = \boldsymbol{M}_Q + \boldsymbol{r}_{QG}\wedge(-m\ddot{\boldsymbol{r}}_Q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_Q\cdot\boldsymbol{\Omega})\,. \tag{4}$$



Vista en plano vertical por QG



Vista en planta

Obtenemos primero los términos del momento $\boldsymbol{M}_Q^*$. El sumando $\boldsymbol{M}_Q$ es debido al peso de la peonza,

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{r}_{QG}\wedge(-mg\,\boldsymbol{K}) = -\frac{3}{4}h\boldsymbol{k}\wedge mg(\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{v} + \cos\theta\,\boldsymbol{k}) = mgb\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}\,. \tag{5}$$

Para calcular el término de inercia del momento expresamos primero la aceleración de Q:

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}_Q &= -a\omega_0^2\boldsymbol{u}_r = -a\omega_0^2[-\operatorname{sen}(\psi-\omega_0 t)\boldsymbol{u} + \cos(\psi-\omega_0 t)\boldsymbol{w}]\\ &= -a\omega_0^2[-\operatorname{sen}(\psi-\omega_0 t)\boldsymbol{u} - \cos(\psi-\omega_0 t)\cos\theta\,\boldsymbol{v} + \cos(\psi-\omega_0 t)\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{k}]\end{aligned} \tag{6}$$

con lo que operando

$$\boldsymbol{r}_{QG}\wedge(-m\ddot{\boldsymbol{r}}_Q) = mab\omega_0^2[\cos(\psi-\omega_0 t)\cos\theta\,\boldsymbol{u} - \operatorname{sen}(\psi-\omega_0 t)\boldsymbol{v}]\,. \tag{7}$$

Por otra parte, el término de la derecha en (4) se calcula desarrollando la derivada a través del triedro intermedio como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{I}_Q\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{I}_Q\cdot\boldsymbol{\Omega}\right)_{\text{tr.int.}} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot\varphi\,\boldsymbol{k})\wedge(\boldsymbol{I}_Q\cdot\boldsymbol{\Omega})\,. \tag{8}$$

Sustituyendo las expresiones de (2) y (3) resultan finalmente las ecuaciones

$$\begin{aligned} M_u^* &= A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + Cr\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta \\ M_v^* &= A\ddot{\psi}\operatorname{sen}\theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta - Cr\dot{\theta} \\ M_z^* &= C\dot{r}\,, \end{aligned} \tag{9}$$

Siendo $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$ y (M_u^*, M_v^*, M_z^*) las componentes del momento $\boldsymbol{M}_Q^*$ en (4) que se deducen de (5) y (7):

$$M_u^* = mgb\operatorname{sen}\theta + mab\omega_0^2\cos(\psi - \omega_0 t)\cos\theta\,; \quad M_v^* = -mab\omega_0^2\operatorname{sen}(\psi - \omega_0 t)\,; \quad M_z^* = 0\,. \tag{10}$$

En estas ecuaciones se deduce inmediatamente la intergal primera

$$M_z^* = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = \text{cte.} \tag{11}$$

3.— El caso particular del movimiento pedido es $\psi(t) = \omega_0 t$, lo cual sustituido en la ecuación $(9)_2$:

$$2A\omega_0\dot{\theta}\cos\theta - Cr\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 \text{ (cte.)}\,. \tag{12}$$

Por otra parte, sustituyendo en $(9)_1$:

$$-A\omega_0^2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 + Cr\omega_0\operatorname{sen}\theta_0 = mgb\operatorname{sen}\theta_0 + mab\omega_0^2\cos\theta_0\,. \tag{13}$$

Esta expresión es una ecuación cuadrática en ω_0, que tiene dos soluciones posibles:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{Cr\operatorname{tg}\theta_0}{2(A\operatorname{sen}\theta_0 + mab)}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgb(A\operatorname{sen}\theta_0 + mab)}{C^2 r^2\operatorname{tg}\theta_0}}\right]}\,. \tag{14}$$