Mecánica

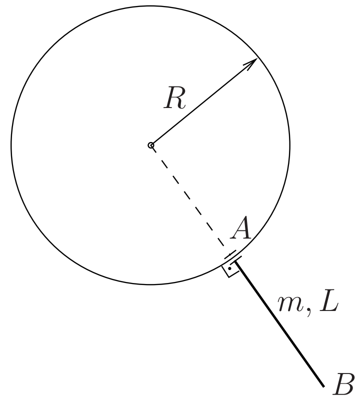
EXAMEN FINAL (22 de Junio de 2009)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 5.º (puntuación: 10/45) Tiempo: 60 min.

Una varilla AB pesada de masa m y longitud L se mueve de forma que uno de sus extremos A desliza sin rozamiento sobre una circunferencia vertical fija de radio R. Además la articulación en A es tal que hace que la varilla se mantenga siempre perpendicular a la circunferencia en dicho punto, como muestra la figura adjunta.

Nota: la posición genérica de la figura no muestra a la varilla en verdadera magnitud, ya que ésta se encuentra fuera del plano de la circunferencia.



Se pide:

1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y, si procede, proporcionar una interpretación física de éstas;

2. Obtener las ecuaciones del movimiento de la varilla;

3. Obtener la componente perpendicular al plano de la circunferencia de la fuerza de reacción que ejerce la circunferencia sobre la varilla en A.

⋆

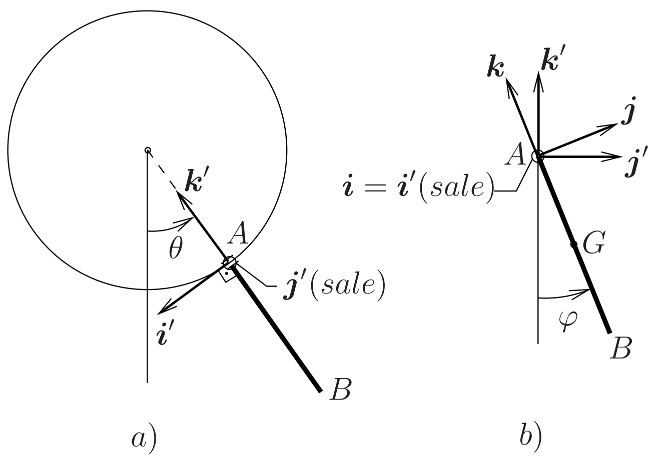


Figura 1: *Grados de libertad y sistemas de referencia auxiliares. La figura b) muestra la varilla en verdadera magnitud.*

1. La varilla tiene 2 grados de libertad que podemos representar con el ángulo θ que forma el radio que sitúa A sobre la circunferencia respecto de la vertical descendente, y el ángulo φ que gira la varilla alrededor de la tangente a la circunferencia en A. Por conveniencia definimos además dos sistemas de referencia auxiliares: el sistema móvil $\{A; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ y el sistema ligado a la varilla $\{A; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, como muestra la Figura 1.

El movimiento de la varilla solamente tiene una integral primera, que es la conservación de la energía mecánica $E = T + V = cte.$ puesto que la única fuerza que trabaja (el peso) es conservativa.

2. Una de las ecuaciones del movimiento será la de la conservación de la energía ($E = T+V$) discutida en el apartado anterior, y podemos seleccionar como ecuación adicional cualquiera de las dos ecuaciones de Lagrange que se pueden obtener a partir de la función Lagrangiana ($L = T - V$) del sistema.

La energía potencial gravitatoria de la varilla se puede calcular, denotando por $\boldsymbol{K}$ el versor vertical ascendente, como:

$$V = mg\, \boldsymbol{OG} \cdot \boldsymbol{K} = mg(\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AG}) \cdot \boldsymbol{K} = -mgR\cos\theta - mg\frac{L}{2}\cos\varphi\cos\theta \tag{1}$$

La energía cinética de la varilla se puede calcular a partir de la velocidad de su centro de masa $\boldsymbol{v}_G$ y de su velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ mediante la expresión:

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega}) \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{I}_G = \frac{1}{12}mL^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{expresado en} \quad \{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\} \tag{2}$$

La velocidad de rotación de la varilla tiene una componente $\dot{\theta}$ según la dirección perpendicular a la circunferencia y otra $\dot{\varphi}$ según la dirección tangente en A. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{j}' = \cos\varphi\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{j}' + \dot{\varphi}\boldsymbol{i} = \dot{\varphi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{j} - \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k} \qquad , \tag{3}$$

la velocidad del centro de masa resulta, teniendo en cuenta también que $\boldsymbol{v}_A = -R\dot{\theta}\ \boldsymbol{i}$ y que $\boldsymbol{AG} = -L/2\ \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{AG} = -\dot{\theta}\left(R + \frac{L}{2}\cos\varphi\right)\boldsymbol{i} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\boldsymbol{j} \tag{4}$$

Teniendo en cuenta (1), (2), (3) y (4) se obtiene finalmente la primera ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} E = T + V = \frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}^2\left(R^2 + \frac{L^2}{4}\cos^2\varphi + RL\cos\varphi\right) + \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\right] + \frac{1}{24}mL^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\cos^2\varphi) \\ -mg\cos\theta\left(R + \frac{L}{2}\cos\varphi\right) = cte. \end{aligned} \tag{5}$$

La segunda ecuación del movimiento la podemos obtener a partir de la Lagrangiana del sistema, cuya expresión es similar a (5) solo que cambiando el signo del último término, asociado al potencial gravitatorio. En base a ella se obtienen las dos ecuaciones de Lagrange siguientes:

$$m\ddot{\theta}\left(R^2 + \frac{L^2}{3}\cos^2\varphi + RL\cos\varphi\right) - mL\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{2L}{3}\cos\varphi + R\right) + mg\operatorname{sen}\theta\left(R + \frac{L}{2}\cos\varphi\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi} + mL\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{L}{3}\cos\varphi + \frac{R}{2}\right) + \frac{L}{2}mg\cos\theta\operatorname{sen}\varphi = 0 \qquad ,$$

pudiendo ser cualquiera de ellas la segunda ecuación del movimiento.

3. Una forma de obtener la reacción pedida (H) es planteando el principio de cantidad de movimiento a la varilla en dirección perpendicular al plano de la circunferencia:

$$H = m\, \boldsymbol{a}_G \cdot \boldsymbol{j}'$$

La aceleración de G se puede calcular de varias maneras. Una de ellas es mediante el campo de aceleraciones de la varilla, apoyándonos en la aceleración de A, o bien haciendo uso del sistema móvil $\{A; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$. De ésta última manera, la aceleración de G se calcula como:

$$\boldsymbol{a}_G = \boldsymbol{a}_{G_{relativa}} + \boldsymbol{a}_{G_{arrastre}} + \boldsymbol{a}_{G_{coriolis}} \tag{6}$$

La proyección sobre $\boldsymbol{j}'$ de los distintos términos de (6), teniendo en cuenta que $\boldsymbol{j} = \cos\varphi \boldsymbol{j}' + \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{k}'$ y $\boldsymbol{k} = -\operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{j}' + \cos\varphi \boldsymbol{k}'$ resulta:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{G_{relativa}} \cdot \boldsymbol{j}' &= (\frac{L}{2}\ddot{\varphi}\boldsymbol{j} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}^2\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{j}' = \frac{L}{2}\cos\varphi\ddot{\varphi} - \frac{L}{2}\operatorname{sen}\varphi\dot{\varphi}^2 \\
\boldsymbol{a}_{G_{arrastre}} \cdot \boldsymbol{j}' &= \Big[\boldsymbol{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ref} \wedge \boldsymbol{AG} + \boldsymbol{\Omega}_{ref} \wedge (\boldsymbol{\Omega}_{ref} \wedge \boldsymbol{AG}\Big] \cdot \boldsymbol{j}' = 0 \\
\boldsymbol{a}_{G_{coriolis}} \cdot \boldsymbol{j}' &= [2\boldsymbol{\Omega}_{ref} \wedge \boldsymbol{v}_{rel}] \cdot \boldsymbol{j}' = 0
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\boldsymbol{\Omega}_{ref}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{ref}$ son paralelos a $\boldsymbol{j}'$, y por tanto el producto vectorial de cualquiera de ellos con un vector es otro vector prependicular a $\boldsymbol{j}'$.

También se podría haber calculado la coordenada absoluta de G según $\boldsymbol{j}'$ (perpendicular al plano de la circunferencia) y directamente se ve que derivada dos veces da el mismo resultado.

Por tanto la fuerza de reacción pedida es:

$$H = m\frac{L}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\varphi)$$