

Capítulo 3

Estática Analítica

Índice

3.1. Consideraciones generales	3.1
3.2. Condiciones analíticas del equilibrio	3.4
3.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz	3.6
3.3. Estabilidad del equilibrio	3.7
3.3.1. Concepto de estabilidad	3.7
3.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet	3.9
3.4. Equilibrio de una partícula	3.11
3.4.1. Partícula libre	3.11
3.4.2. Partícula ligada a una superficie	3.12
3.4.3. Partícula ligada a una curva	3.14
3.5. Equilibrio de un sistema de partículas	3.16
3.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática	3.16
3.5.2. Principio de los trabajos virtuales	3.18
3.6. Equilibrio del sólido rígido	3.20
3.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales	3.20
3.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos	3.22

3.1. Consideraciones generales

En los capítulos precedentes se ha estudiado la descripción del movimiento (cinemática), las magnitudes que caracterizan al mismo en sistemas

materiales (cinética), y la evolución de estas magnitudes con el tiempo (dinámica).

En este capítulo se estudiará la estática o equilibrio de los sistemas, entendida como la ausencia de movimiento. Se trata por tanto de un caso particular de la dinámica, pero que por su importancia merece un tratamiento especial.

DEFINICIÓN:

Se dice que un sistema material está en equilibrio cuando todas sus partículas se encuentran en reposo, y permanecen en el mismo estado de reposo.

Para que se verifique el equilibrio y éste sea estable han de darse una serie de condiciones, cuyo análisis constituye el objeto de la estática. Ésta permitirá analizar diversos tipos de problemas:

1. Para un sistema sometido a un conjunto de fuerzas dadas, establecer la *existencia* de una o más posibles configuraciones de equilibrio y determinar éstas.
2. Analizar la *estabilidad* de las posiciones de equilibrio. El concepto de estabilidad consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo a dicha configuración, o si por el contrario se aleja indefinidamente de la misma.
3. Para un sistema en una configuración geométrica determinada, determinar las *acciones necesarias* (tanto en lo que respecta a fuerzas activas como a reacciones) para el equilibrio y su estabilidad.

Las aplicaciones prácticas de la estática en la ingeniería son muy numerosas, siendo quizá la parte de la mecánica más empleada. Esto es así especialmente en la ingeniería civil y en el análisis estructural: por lo general las estructuras se diseñan para estar y permanecer en reposo bajo las cargas de servicio estáticas, o para que su movimiento bajo cargas dinámicas sea pequeño y estable (vibraciones).

Los principios generales de la dinámica de sistemas, desarrollados en los capítulos anteriores permiten, mediante su particularización a las condiciones de la estática, establecer las condiciones generales del equilibrio. En concreto, para un sistema general de varias partículas (digamos N), la aplicación del principio de la cantidad de movimiento a cada partícula (ecuación

(1.33)), para las condiciones particulares del equilibrio ($d\mathbf{v}_i/dt = \mathbf{0}$), da lugar a una condición necesaria: $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, ($i = 1, 2, \dots, N$). Por otra parte, si el sistema parte de un estado inicial de reposo ($\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$) la condición anterior es también suficiente. Podemos adoptar por lo tanto con carácter general como condición de equilibrio (necesaria y suficiente) la anulación de la resultante de las fuerzas ejercidas sobre cada partícula:

$$\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}, \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \iff \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

En los sistemas reales con infinitas partículas (p. ej., sólidos rígidos considerados como medios continuos) es preciso reducir las condiciones generales para el equilibrio expresadas arriba a un número menor de condiciones, de forma que sea abordable el problema mediante los métodos de la mecánica de sistemas discretos estudiados en este curso¹. En cualquier caso, el estudio de las fuerzas será esencial para las condiciones de equilibrio.

Ya se estableció una clasificación somera de las fuerzas en un sistema en el apartado 1.2. Sin embargo, recordaremos aquí algunos conceptos que nos serán útiles para la estática. En primer lugar, es posible clasificar las fuerzas en fuerzas *activas* o *directamente aplicadas*, y fuerzas *pasivas*, también llamadas *reacciones* o *fuerzas de ligadura*. Las primeras son las que tienen un valor conocido, variables con el tiempo o no (por ejemplo, cargas exteriores ejercidas sobre el sistema), o posiblemente en función de la configuración o estado del sistema (por ejemplo, fuerzas internas en muelles o amortiguadores). Por el contrario, se consideran reacciones las que sirven para imponer una determinada ligadura o apoyo, y cuyo valor debe calcularse imponiendo las ecuaciones de equilibrio compatibles con dicha ligadura (o de la dinámica si el problema no es estático).

Otra clasificación de las fuerzas a tener en cuenta es como *interiores* y *exteriores*. El primer caso engloba a todas las que provienen de partículas dentro del propio sistema, tanto por acciones de contacto, acciones a distancia (por ejemplo, atracción gravitatoria), o mediante elementos discretos como resortes o amortiguadores. En este caso tanto la acción como la reacción que postula la tercera ley de Newton se ejercen entre partículas del sistema. Por el contrario, se denomina fuerza exterior a la que proviene de puntos externos al sistema, y la reacción a la misma no se ejerce por tanto sobre el sistema. Tanto las fuerzas activas como las reacciones pueden ser

¹Se puede estudiar la estática (y también la dinámica) en medios continuos, mediante ecuaciones en derivadas parciales o formulaciones débiles equivalentes como el principio de los trabajos virtuales. Entre los procedimientos de resolución, el más potente en la actualidad es el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.), especialmente adecuado para su tratamiento numérico en ordenadores.

a su vez interiores o exteriores, siendo ambas clasificaciones independientes. Así, las ligaduras pueden provenir de partículas del mismo sistema (por ejemplo, distancias constantes entre puntos de un sólido rígido) o de fuera del mismo (por ejemplo, apoyos o sustentaciones externas).

Otro elemento importante para el análisis del equilibrio son las *ligaduras* o *enlaces*. Ya se habló sobre ellas en el apartado 1.2, por lo que sólomente recordaremos aquí los aspectos fundamentales. Establecíamos allí la clasificación entre enlaces *holónomos*, funciones que imponían condiciones entre coordenadas y tiempo:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = 0, \quad (3.2)$$

y enlaces *anholónomos*, funciones que adicionalmente dependían de las velocidades:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_n, t) = 0 \quad (3.3)$$

Asimismo, en función de su variación temporal, los enlaces se denominan *reónomos* si dependen explícitamente del tiempo ($\partial\phi/\partial t \neq 0$) o *esclerónomos* si no varían con el tiempo ($\partial\phi/\partial t = 0$). Por último, denominamos *lisos* a los enlaces cuyas fuerzas de reacción no realizan trabajo para los movimientos permitidos por los mismos, mientras que serán *rugosos* en caso contrario. Para que tenga sentido esta última clasificación, es obvio que el enlace debe permitir algún movimiento, ya que en caso contrario no cabe hablar de trabajo. Para ilustrar esta última clasificación, considérese un apoyo deslizante, que puede ser liso o con rozamiento entre las superficies; por el contrario, si el apoyo restringe todos los movimientos del punto en cuestión se convierte en un *empotramiento*, al cual no tiene sentido calificarlo como liso ni rugoso.

3.2. Condiciones analíticas del equilibrio

En el capítulo 2 se estudió la formulación analítica de la mecánica, en relación con la dinámica. Recordemos que la base de dicho planteamiento, debido originalmente al matemático francés Lagrange, es la descripción de la configuración del sistema mediante un conjunto reducido de *coordenadas generalizadas*, para las que empleamos la notación $\{q_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), que sirven para definir de manera unívoca la configuración. Estas coordenadas pueden, en principio, representar magnitudes físicas diversas (longitudes, ángulos, distancias al cuadrado, ...), no estando restringidas a sistemas de coordenadas algebraicas ni a bases de espacios vectoriales.

La ventaja fundamental del uso de coordenadas generalizadas es que en su propia elección está incluida de forma implícita toda o a menos gran parte de la información de los enlaces. Cuando los enlaces son holónomos, de las ecuaciones (3.2) que los expresan podemos “eliminar” las coordenadas dependientes; de esta forma, restan al final únicamente las coordenadas independientes o *grados de libertad* del sistema. Si existen además enlaces anholónomos propiamente dichos (es decir, no integrables) no será posible eliminar las coordenadas redundantes y será preciso mantener sus ecuaciones de ligadura de manera explícita, para solucionarlas finalmente junto con las ecuaciones de la dinámica mediante multiplicadores de Lagrange (ver apartado 2.2.7).

En cualquier caso, el estudio de un sistema mediante coordenadas generalizadas permite un marco ventajoso para establecer las condiciones de equilibrio, ya que por lo general nos restringiremos al mínimo número de condiciones. Sean las coordenadas generalizadas libres o no, por lo general son un número mucho más reducido que el de las coordenadas cartesianas de todas las partículas del sistema; normalmente, serán además un conjunto discreto y finito de coordenadas, en lugar de un número infinito como por ejemplo el que corresponde a las partículas de un sólido considerado como un medio continuo.

Puesto que la relación entre las configuraciones o posiciones del sistema y las coordenadas generalizadas $\mathbf{r}_i(q_j)$ ($i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, n$) es unívoca, es obvio que la definición de equilibrio (3.1) dada en el apartado anterior es equivalente a exigir que las coordenadas generalizadas sean constantes y permanezcan constantes:

$$\boxed{\dot{q}_j = 0; \quad \ddot{q}_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (\text{condición de equilibrio}) \quad (3.4)$$

Para establecer la restricción que esta condición impone a las fuerzas, partimos de las ecuaciones de Lagrange (2.12):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.5)$$

donde Q_j son las fuerzas generalizadas (ecuación (2.7)) y T es la energía cinética. Esta última viene dada, en el caso en que los enlaces no dependan del tiempo, mediante (2.33)²:

$$T = \frac{1}{2} a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

²al igual que en capítulos anteriores, adoptaremos aquí el convenio de sumatorio implícito para los índices repetidos

donde los coeficientes a_{kl} son simétricos, y pueden ser función a su vez de las coordenadas, $a_{kl}(q_j)$. Sustituyendo en las ecuaciones de Lagrange (3.5),

$$\frac{da_{kj}}{dt} \dot{q}_k + a_{kj} \ddot{q}_k - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{kl}}{\partial q_j} \dot{q}_k \dot{q}_l = Q_j$$

y empleando la condición de equilibrio (3.4) se llega a la condición equivalente

$$\boxed{Q_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n)} \quad (3.6)$$

Es fácil ver también que, si $Q_j = 0$ y se parte de condiciones iniciales de reposo ($\dot{q}_j(0) = 0$), puesto que la matriz de coeficientes a_{kl} es regular, ha de ser $\ddot{q}_j = 0$. Por lo tanto, la anulación de las fuerzas generalizadas (3.6) es necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema, pudiendo considerarse como una condición equivalente a (3.4).

3.2.1. Unicidad del equilibrio; condición de Lipschitz

Acabamos de ver que si se anulan las fuerzas generalizadas ($Q_j = 0$) existe solución estática o de equilibrio. Sin embargo, no queda demostrado desde el punto de vista matemático la unicidad de esta solución. Podría, en teoría, existir otra solución que fuese dinámica.

Desde un punto de vista físico determinista la falta de unicidad no tiene sentido, pues supondría que a partir de condiciones iniciales dadas es imposible predecir el estado o la evolución de un sistema. Esto de hecho ocurre en la dinámica para el caso de los sistemas caóticos, en los que el desorden (“caos”) se debe en realidad a una gran sensibilidad frente a perturbaciones pequeñas, haciéndose en la práctica impredecible su evolución.

Veamos un sencillo ejemplo de sistema que posee solución no única, estática y dinámica:

$$m\ddot{x} = k \left| \sqrt{|x|} \right|, \quad \text{siendo } m, k > 0 \quad (3.7)$$

La solución estática es obviamente:

$$x = 0$$

Sin embargo, existe asimismo una solución dinámica dada por:

$$x = \frac{k^2}{144m^2} t^4$$

basta sustituir en (3.7) para comprobar que esta solución cumple efectivamente la ecuación.

Matemáticamente, la condición de unicidad se expresa por la *Condición de Lipschitz*:

Se dice que una función $Q(q_i, t)$, definida en un Dominio \mathcal{D} cumple la condición de Lipschitz respecto de las variables $\{q_i\}$ si se puede encontrar una constante k tal que $\forall q_i \in \mathcal{D}$ y $\forall \Delta q_i$,

$$|Q(q_i + \Delta q_i, t) - Q(q_i, t)| \leq k \sum_i |\Delta q_i| \quad (3.8)$$

La constante k se denomina constante de Lipschitz.

Si el Dominio \mathcal{D} es convexo, un requisito suficiente para la condición de Lipschitz es que existan derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial q_i}$, y que estén acotadas en \mathcal{D} .

La función (3.7) propuesta en el ejemplo anterior no podemos garantizar que cumple la condición de Lipschitz en $x = 0$, pues no existe allí su derivada. por tanto, no está garantizada la unicidad de la solución, que de hecho hemos visto no es única.

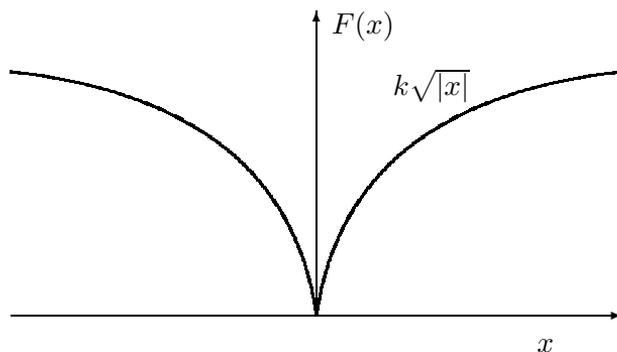


Figura 3.1: Sistema gobernado por la ecuación $m\ddot{x} = k\sqrt{|x|}$; la solución estática en $x = 0$ no es única, debido a la no derivabilidad de la función de fuerza en este punto.

3.3. Estabilidad del equilibrio

3.3.1. Concepto de estabilidad

Una perturbación del equilibrio en que se alteren las coordenadas $\{q_i\}$, o bien se ponga en movimiento el sistema con velocidades iniciales $\{\dot{q}_i \neq 0\}$, dará lugar a una evolución dinámica del sistema, en la que obviamente la configuración varía respecto de la posición de equilibrio.

Se dice que el equilibrio es *estable* cuando la variación respecto de la posición de equilibrio está acotada, llegando a ser tan pequeña como queramos al hacer la perturbación suficientemente pequeña. En términos más

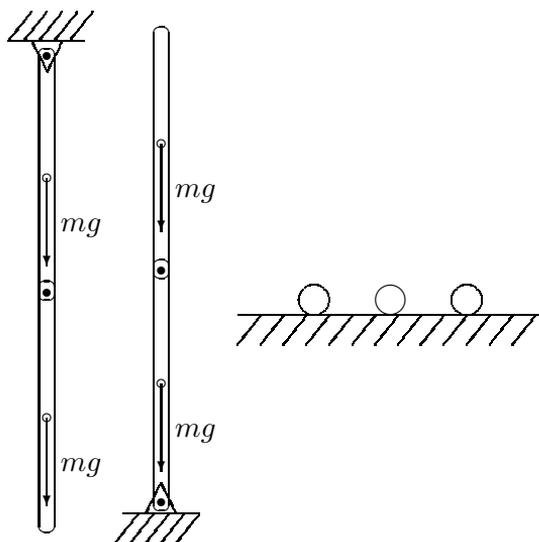


Figura 3.2: Ejemplos de equilibrio estable, inestable e indiferente.

precisos, y suponiendo que la posición de equilibrio corresponde a $\{q_i = 0\}$, diremos que el equilibrio es estable si para un valor ϵ tan pequeño como se desee es posible encontrar un valor δ de forma que:

$$\forall \epsilon, \exists \delta \text{ tal que } |q_{0i}| < \delta, \quad |\dot{q}_{0i}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |q_i| < \epsilon$$

En este caso lo que ocurre es que las fuerzas que se originan en esta perturbación tienden a devolver al sistema a su posición de equilibrio.

Por el contrario, se dice que el equilibrio es *inestable* cuando la configuración del sistema no está acotada, aún para una perturbación pequeña, perdiéndose por tanto la posición de equilibrio. Las fuerzas tienden a separar el sistema de su posición de equilibrio.

Por último, cabe hablar también de equilibrio *indiferente*, referido a perturbaciones en que se alteran tan sólo las coordenadas, pero no las velocidades. En este caso las nuevas posiciones, cercanas a la posición original de equilibrio siguen siendo de equilibrio.

Restringiéndonos al caso en que las fuerzas provengan de un potencial V ($Q_i = -\partial V / \partial q_i$), es inmediato observar que la condición de equilibrio (3.6) exige que éste adopte un valor estacionario en la posición de equilibrio:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i=0} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.9)$$

El problema de la estabilidad del equilibrio es en realidad un problema de dinámica, como se ha observado arriba, puesto que una vez que se perturba

la posición de equilibrio, aunque sea ligeramente, se pierden las condiciones estáticas (3.4).

3.3.2. Condiciones de estabilidad: teorema de Lejeune-Dirichlet

Supongamos un sistema en que las fuerzas provienen de un potencial V : $Q_i = -\partial V/\partial q_i$, y que además es autónomo: $\partial V/\partial t = 0$. Sabemos que en el equilibrio debe cumplirse $\partial V/\partial q_i = 0$, por lo cual V adopta un valor estacionario en dicho punto. La condición analítica para la estabilidad del equilibrio viene dada por el teorema de Lejeune-Dirichlet, que afirma:

“Si el potencial V es mínimo en la posición de equilibrio, ésta es estable”

Cuando el potencial toma un valor estacionario correspondiente a un máximo, por el contrario, el equilibrio es inestable. En el caso en que V sea estacionario pero no corresponda ni a un mínimo ni a un máximo, el carácter del equilibrio es en principio dudoso, pudiendo corresponder a situaciones de equilibrio indiferente o inestable.

Veamos en primer lugar una justificación del teorema mediante un razonamiento sencillo e intuitivo, basado en la conservación de la energía total, $E = T + V$. Dicha energía debe conservarse, al provenir las fuerzas de un potencial autónomo. Supongamos una perturbación del equilibrio, que esté asociada bien a un cambio de las coordenadas $\{q_i\}$ o de las velocidades $\{\dot{q}_i\}$, o de ambas al tiempo. En cualquier caso, y asignando (sin pérdida de generalidad) valor nulo al potencial en la posición de equilibrio, en ella la energía total es nula; la perturbación inicial del mismo está asociada a una energía pequeña $\epsilon = \Delta E$ de forma que en la evolución posterior (dinámica) se cumple:

$$\epsilon = T + V$$

Si en la posición de equilibrio $V|_0 = 0$ es un mínimo local, al separarse ligeramente del mismo será $V > 0$. Por otra parte la energía cinética también se anula en la posición de equilibrio y su carácter esencialmente positivo obliga igualmente a que sea $T > 0$. Al ser $T + V = \epsilon$, esto indica que ambos deben estar acotados:

$$T + V = \epsilon, \quad T > 0, V > 0 \quad \Rightarrow \quad T < \epsilon, V < \epsilon$$

La regularidad de V y T como funciones de las coordenadas y de las velocidades respectivamente hacen que esta condición sea equivalente a que las coordenadas y las velocidades se mantengan igualmente pequeñas, asegurando por tanto la estabilidad.

Por el contrario, si V está en un punto de máximo, al apartarse del equilibrio es $V < 0$, por lo cual la energía cinética T debe crecer para mantener la suma igual a ϵ , apartándose el sistema cada vez más de la posición de equilibrio, con lo que éste será inestable.

Es posible realizar una discusión algo más precisa de la estabilidad basándose en el desarrollo en serie de V :

$$V(\mathbf{q}) = V(\mathbf{0}) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_0}_{=0} q_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0}_{\stackrel{\text{def}}{=} k_{ij}} q_i q_j + \dots \quad (3.10)$$

La variación del potencial respecto de la posición de equilibrio es por tanto

$$\Delta V = V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_0 q_i q_j + \dots \quad (3.11)$$

Si se desprecian en el desarrollo anterior los términos de orden superior al segundo, la condición de estabilidad viene determinada por la matriz de coeficientes $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$ en (3.10). La condición de mínimo equivale a que esta matriz sea definida positiva, es decir

$$\{\mathbf{a}\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{a}\} > 0 \quad \forall \{\mathbf{a}\} \neq \{\mathbf{0}\}. \quad (3.12)$$

Puede teóricamente darse el caso de que V sea mínimo pero que no se cumpla estrictamente la condición anterior, siendo la desigualdad ≥ 0 . La matriz $[\mathbf{K}] = [k_{ij}]$ sería entonces semidefinida positiva, siendo preciso para evaluar la estabilidad un estudio más detallado de los términos de orden superior. En concreto serían los términos pares de orden superior al segundo en (3.10) los encargados de hacer cumplir la condición de mínimo, $\Delta V > 0$.

El hecho de que el potencial sea mínimo corresponde a que las fuerzas que se generan en el sistema al perturbar la posición de equilibrio,

$$Q_i \simeq \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} q_j,$$

que son fuerzas pequeñas (del orden de q_j), tiendan a recuperar la posición de equilibrio. Si existen además fuerzas de tipo viscoso (proporcionales a las velocidades \dot{q}_j) éstas no alteran la naturaleza del equilibrio puesto que son infinitésimas para alteraciones de las posiciones próximas al equilibrio. En efecto, producida una perturbación en coordenadas, estas fuerzas de tipo viscoso no tenderían ni a devolver ni a apartar al sistema de la posición de equilibrio si las velocidades son cero, o prácticamente cero.

Por el contrario, hay resistencias pasivas como el rozamiento que toman un valor finito ante cualquier intento de desplazamiento, en el sentido de impedir el mismo. En este caso sí pueden resultar estabilizadoras del equilibrio, creando lo que se puede llamar “zonas” de equilibrio estable (el equilibrio estable se produce no sólo en el punto de mínimo potencial V , sino en un dominio finito en que las fuerzas de rozamiento garantizan la estabilidad).

Una consecuencia práctica inmediata del teorema de Lejeune-Dirichlet es el teorema de Torricelli, para sistemas sujetos al campo gravitatorio simplificado. Este afirma que

Para un un sistema sometido a un campo gravitatorio uniforme, las posiciones de equilibrio estable son las que corresponden a los mínimos de la altura (coordenada vertical) del centro de masas.

En efecto, el potencial del sistema es

$$V = \sum_i m_i g z_i = M g z_G$$

por lo cual, el mínimo de z_G coincide con el mínimo de V , lo que garantiza la estabilidad.

3.4. Equilibrio de una partícula

3.4.1. Partícula libre

Para fijar ideas desarrollaremos en la práctica los conceptos de equilibrio expuestos arriba, comenzando por el sistema más simple, una partícula o punto material libre. Las coordenadas generalizadas pueden ser las tres coordenadas cartesianas (x, y, z) , o bien las coordenadas en otro sistema como cilíndricas, esféricas, etc. (ver apéndice B).

La condición de equilibrio es

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{3.13}$$

donde \mathbf{F} es la resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre la partícula. En general, \mathbf{F} será función de la posición de la partícula, lo cual nos permite plantear el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que define las posiciones de equilibrio.

Si \mathbf{F} (bien todas o algunas de sus componentes) depende a su vez del tiempo, es decir si se trata de un sistema no autónomo, para que haya equilibrio será necesario conseguir la anulación de $\mathbf{F}(t)$ en todo momento.

Si las fuerzas provienen de un potencial V , la condición de equilibrio (3.13) equivale a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \quad (3.14)$$

es decir, V ha de tomar un valor estacionario. Para que este equilibrio sea estable, tal y como hemos visto con anterioridad, este punto debe constituir un mínimo de V , lo que queda garantizado si la matriz de derivadas segundas es definida positiva:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{pmatrix} > 0$$

Un resultado elemental de algebra matricial es que para que una matriz sea definida positiva todos sus menores principales han de ser positivos, lo cual en nuestro caso se traduce en tres inecuaciones, al ser la matriz de orden tres.

Conviene observar que, en el caso de emplear coordenadas curvilíneas y que estas no sean regulares en todo el dominio, en los puntos de singularidad no será posible aplicar el criterio anterior. Esto ocurre, por ejemplo, en coordenadas esféricas para los puntos de latitud $\lambda = \pm\pi/2$. En estos puntos es necesario realizar un cambio a otras coordenadas regulares para estudiar el equilibrio.

Por último, este caso sencillo permite hacerse una idea intuitiva de la naturaleza de las fuerzas estabilizadoras para una posición de equilibrio estable. En efecto, éstas quedan definidas por el gradiente de V con signo cambiado,

$$\mathbf{F} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}} = -\mathbf{grad} V$$

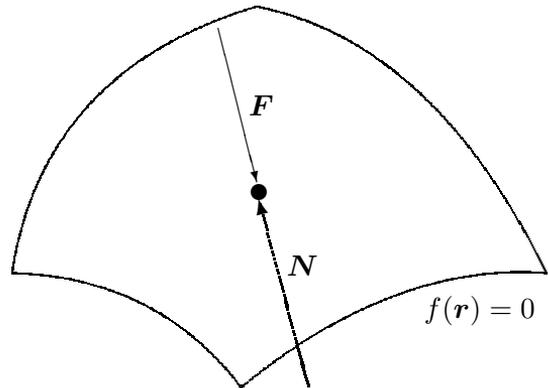
vector que va dirigido hacia los puntos de mínimo valor de V , es decir en dirección contraria a los puntos de máximo V . Por tanto, en el primer caso las fuerzas tienden a recuperar la posición de equilibrio, mientras que en el segundo alejan a la partícula de esta posición.

3.4.2. Partícula ligada a una superficie

Consideramos la superficie definida por la expresión analítica

$$f(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.15)$$

Figura 3.3: *Partícula ligada a una superficie*



Supondremos una partícula ligada de forma bilateral a la superficie mediante un enlace liso, por lo que la reacción sobre la partícula será normal a la superficie:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f \quad (3.16)$$

La condición de equilibrio requiere la anulación de la resultante de sumar fuerzas aplicadas (\mathbf{F}) y reacción (\mathbf{N}):

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Las cuatro incógnitas (coordenadas (x, y, z) de la partícula y multiplicador λ) se resuelven mediante las cuatro ecuaciones escalares que se deducen de (3.15) y (3.17).

En el caso en que la ligadura no sea bilateral, pudiendo la partícula abandonar la superficie por una de sus caras, la reacción (3.16) no puede tomar un valor cualquiera, sino que se verá limitado a $\lambda \geq 0$ ó $\lambda \leq 0$ según la cara libre. El método a seguir en este caso es solucionar el problema igual que si la ligadura fuera bilateral, para comprobar después el signo de λ . Si éste es el adecuado, se da por válida la solución; si no, la partícula habría abandonado la superficie y se rehace el cálculo considerándola libre a partir de ese instante.

Por lo general, en lugar de resolver directamente para las cuatro variables (x, y, z, λ) , es preferible un planteamiento más sencillo empleando la definición paramétrica de la superficie, en función de dos parámetros u y v . Notemos que la ecuación (3.16) expresa simplemente que la fuerza aplicada \mathbf{F} ha de ser normal a la superficie, lo que equivale a que sea normal a dos vectores tangentes a la misma, $\partial \mathbf{r} / \partial u$ y $\partial \mathbf{r} / \partial v$:

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0, \quad \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad (3.18)$$

estas dos ecuaciones, en función de las variables u y v , definen las posiciones de equilibrio sobre la superficie. En el caso particular en que \mathbf{F} provenga de un potencial, (3.18) equivale a:

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial u} = 0,$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V(u, v)}{\partial v} = 0;$$

es decir, equivale a que el potencial $V(u, v)$ expresado como función de las coordenadas (u, v) de la superficie, sea estacionario. De hecho, podríamos haber considerado desde un principio (u, v) como las dos coordenadas generalizadas del sistema, lo que nos habría conducido directamente al resultado anterior.

La estabilidad del equilibrio se estudiará mediante la matriz de derivadas segundas de (u, v) ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial u} & \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{pmatrix},$$

analizando si es definida positiva. Volvemos a hacer la observación, aquí más pertinente si cabe, de la comprobación de la regularidad de las coordenadas. En una superficie por lo general las coordenadas serán curvilíneas y es bastante común que existan puntos en los que el mapa paramétrico no sea regular.

Quedaría por estudiar el caso de que la superficie no sea lisa, existiendo una componente tangencial de la reacción debida al rozamiento³.

3.4.3. Partícula ligada a una curva

Consideramos la curva Γ definida por las ecuaciones

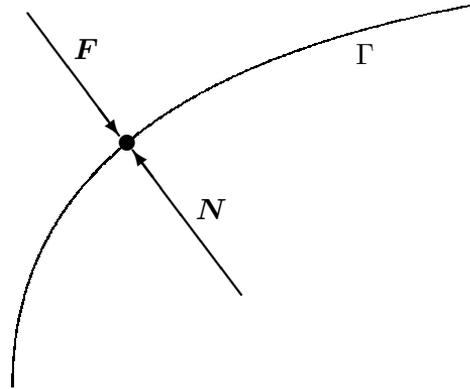
$$f(\mathbf{r}) = 0; \quad g(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.19)$$

Supongamos una partícula ligada a Γ mediante una ligadura bilateral y lisa, por lo que la reacción normal de Γ sobre la partícula será normal a la curva. Esta normal, como sabemos, no es única, expresándose en general como combinación lineal:

$$\mathbf{N} = \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g$$

³Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 13.7 para las resistencias pasivas debidas al rozamiento.

Figura 3.4: *Partícula ligada a una curva Γ lisa: para el equilibrio la fuerza aplicada \mathbf{F} debe anular la reacción normal \mathbf{N} .*



para λ y μ arbitrarias. Si además actúa sobre la partícula una fuerza aplicada \mathbf{F} , el equilibrio requiere $\mathbf{F} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$, es decir

$$\mathbf{F} + \lambda \mathbf{grad} f + \mu \mathbf{grad} g = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

El problema queda planteado pues con 5 ecuaciones escalares (3.19) y (3.20) para las 5 incógnitas (x, y, z, λ, μ) .

En la práctica, el planteamiento expuesto arriba puede resultar demasiado engorroso, pudiendo ser preferible el empleo de la descripción paramétrica de la curva, en función de un parámetro u :

$$\Gamma : \quad u \mapsto \mathbf{r}(u)$$

La expresión de equilibrio (3.20) establece simplemente que \mathbf{F} sea normal a la curva, cuya dirección en un punto viene definida por su tangente $d\mathbf{r}/du$. Por tanto, equivale a

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0 \quad (3.21)$$

resultando una única ecuación en función del parámetro u , que define el o los puntos de equilibrio.

En este caso, aunque $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ no se haya obtenido a partir de un potencial, admitiendo que sea una función continua, siempre será posible obtener una determinada función potencial definida sobre la curva,

$$V_1(u) = - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

de forma que el equilibrio corresponde a los puntos en los que $V_1(u)$ es estacionario. En efecto, para un elemento $d\mathbf{r}$ sobre Γ ,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} du$$

por lo que la derivada de V_1 coincide con (3.21):

$$\frac{dV_1(u)}{du} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{du} = 0$$

Si \mathbf{F} se obtuvo a partir de un potencial general en el espacio $V(\mathbf{r})$, lógicamente el potencial sobre la curva coincidirá con aquél:

$$V_1(u) = - \int -\mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{r} = \int dV = V(\mathbf{r}(u))$$

La estabilidad del equilibrio corresponderá lógicamente a los mínimos de la función potencial,

$$\frac{d^2V_1}{du^2} > 0.$$

Por último, en los casos en que la ligadura no sea lisa y puedan existir fuerzas de reacción tangentes a la curva, habría que proyectar las fuerzas aplicadas según la tangente para establecer la inecuación de rozamiento⁴.

3.5. Equilibrio de un sistema de partículas

3.5.1. Ecuaciones cardinales de la estática

En el caso de un sistema de N partículas, el equilibrio del mismo equivale al de cada una de sus partículas:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.22)$$

donde \mathbf{F}_i es la fuerza total sobre cada partícula i , resultante de fuerzas exteriores e interiores:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{ext} + \mathbf{F}_i^{int}$$

La aplicación de las condiciones de equilibrio (3.22) puede resultar muy trabajosa, al tenerse que realizar para cada una de las N partículas. En el caso de medios continuos, rígidos o no, constituidos por infinitas partículas, es prácticamente imposible. Por lo tanto es necesario obtener ecuaciones y condiciones de tipo global que caractericen el equilibrio de un sistema en su conjunto. Además, las ecuaciones (3.22) tienen el inconveniente de que intervienen tanto las fuerzas activas como las reacciones, a menudo desconocidas a priori.

⁴Véase *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 13.7 para las resistencias pasivas debidas al rozamiento.

El estudio del equilibrio se puede hacer particularizando algunos de los principios generales de la dinámica de sistemas estudiados en el capítulo 6.

En primer lugar, al sumar (3.22) para todas las partículas del sistema, las fuerzas interiores se anulan dos a dos (apartado 1.3.1), por lo que se obtiene

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

tomando momentos de las fuerzas respecto de un punto cualquiera, sumando los mismos obtendremos otra ecuación análoga:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Al igual que en el apartado 1.3.2 hemos considerado que las fuerzas internas son centrales, por lo que sus momentos se anulan dos a dos.

Las ecuaciones (3.23) y (3.24), denominadas *ecuaciones cardinales de la estática*, constituyen un conjunto *necesario* de condiciones que han de cumplirse para que todo sistema esté en equilibrio. En el caso general de un sistema tridimensional serán 6 ecuaciones, mientras que para un sistema plano se tratará de 3 ecuaciones. Estas ecuaciones equivalen a establecer que el sistema de fuerzas, como sistema de vectores deslizantes, sea un sistema nulo (resultante y momento en un punto nulos). Por otra parte, estas ecuaciones pueden considerarse como un caso particular de las ecuaciones cardinales de la dinámica (1.66), (1.68) ya estudiadas anteriormente.

Como se ha dicho, las ecuaciones cardinales constituyen condiciones necesarias pero *no siempre suficientes* para el equilibrio de un sistema. Dicho de otra manera, el que en un sistema actúe un conjunto de fuerzas de resultante y momento nulos no es garantía de que el sistema esté en equilibrio.

Como ejemplos ilustrativos de esta afirmación basta considerar sistemas en los que pueda haber movimiento relativo entre sus partes, como se muestra en la figura 3.5.

Un método general para establecer el equilibrio es subdividir el sistema global en subsistemas, de forma que al aplicar las ecuaciones (3.23) y (3.24) a cada subsistema resulten condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio del mismo. Adelantaremos que para el caso de los sólidos rígidos estas ecuaciones sí son suficientes para garantizar el equilibrio, lo que se demostrará en el apartado 3.6; por tanto buscaremos una subdivisión en subsistemas rígidos, sin movimiento relativo interno. Lógicamente, al partir

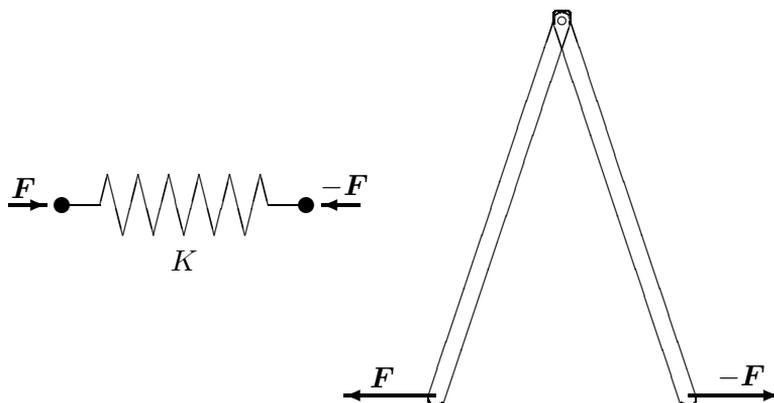


Figura 3.5: *Dos sistemas en los que las fuerzas actuantes tienen resultante y momento nulos, y sin embargo no están en equilibrio.*

un sistema en varios subsistemas las fuerzas ejercidas entre unos y otros, que antes eran internas y no aparecían en las ecuaciones, pasan a ser externas y aumentan por tanto el número de incógnitas. Sin embargo también aumenta el número de ecuaciones (6 por cada subsistema nuevo), de forma que se obtiene finalmente igual número de ecuaciones que de incógnitas.

3.5.2. Principio de los trabajos virtuales

Este principio fue enunciado en el apartado 1.5.1 como un principio básico de la mecánica, equivalente a las leyes o principios de Newton-Euler. Sus características esenciales que nos serán de utilidad son dos: por una parte, establece una *condición global* para el equilibrio de un sistema; por otra, *permite eliminar todas las fuerzas de reacción correspondientes a enlaces lisos*, reacciones que por lo general son desconocidas a priori.

Recordemos aquí simplemente el enunciado expuesto en 1.5.1. Se llaman desplazamientos virtuales $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ a cualquier conjunto de desplazamientos infinitésimos (tan pequeños como se desee) tomados en un instante dado. En general, no es necesario que los desplazamientos virtuales respeten los vínculos; sin embargo nos interesa restringir éstos a los denominados desplazamientos virtuales compatibles, que sí respetan los vínculos lisos.

Se considera un sistema sometido a fuerzas activas $\{\mathbf{f}_i\}$ y reacciones de enlaces lisos $\{\mathbf{R}_i\}$. El trabajo virtual desarrollado por estas reacciones es nulo para $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ compatibles. Por tanto, la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas sea nulo, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los

enlaces:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \{\delta \mathbf{r}_i\} \text{ compatibles}$$

En el caso en que existan enlaces no lisos, el principio se aplica igualmente pero considerando las fuerzas de rozamiento (que sí realizan trabajo virtual) como fuerzas activas. lo mismo habremos de hacer si existe alguna reacción de un enlace, liso o no, cuyo valor deseemos calcular. Esto último será necesario realizarlo en cualquier caso si los enlaces son unilaterales, con objeto de comprobar a posteriori el signo de la reacción obtenida, para ver si es compatible con la inecuación del enlace.

Como ejemplo de aplicación, consideremos el sistema del muelle de la figura 3.5. Llamaremos x a la elongación del resorte medida desde la posición natural del mismo, y sea su constante K . Tomaremos el desplazamiento virtual δx , obteniendo el trabajo virtual como

$$\delta W = F\delta x - Kx \delta x = 0$$

donde Kx es la fuerza interna debida al resorte, que actúa en sentido contrario a x . Al ser δx arbitrario, se llega inmediatamente a la condición de equilibrio

$$F = Kx$$

Como segundo ejemplo consideremos la aplicación del principio para calcular el valor de una reacción de apoyo. Sea la viga biapoyada de la figura 3.6, de longitud total l , en la que se desea calcular el valor de la reacción vertical en A , R_A .

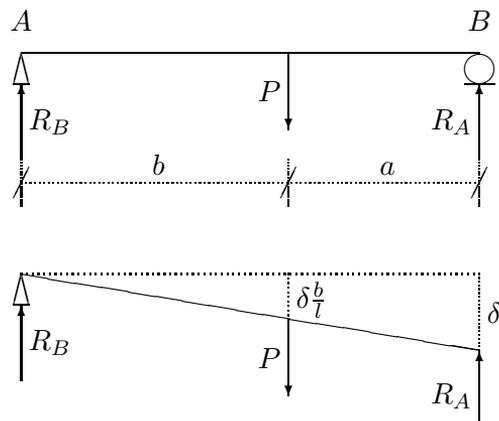


Figura 3.6: Para calcular la reacción en A “liberamos” la coacción correspondiente para calcular el trabajo virtual considerando R_A como fuerza activa

Para ello “liberamos” el apoyo en cuestión y lo sustituimos por una fuerza incógnita R_A . Los desplazamientos virtuales compatibles son los debidos al

giro respecto del apoyo B , que viene caracterizado por el descenso δ en A . Expresando la nulidad del trabajo virtual:

$$\delta W = P \left(\frac{b}{l} \delta \right) - R_A(\delta) = 0$$

al ser δ un valor arbitrario, se elimina para obtener

$$R_A = P \frac{b}{l}$$

Análogamente obtendríamos la reacción en el otro apoyo, $R_B = P \frac{a}{l}$.

3.6. Equilibrio del sólido rígido

3.6.1. Aplicación del principio de los trabajos virtuales

Es posible obtener las condiciones generales de equilibrio del sólido rígido en un caso general aplicando el Principio de los trabajos virtuales. Tomaremos para ello desplazamientos virtuales compatibles con la condición de indeformabilidad del sólido. Éstos han de cumplir una relación similar a la (1.27) que define el campo de velocidades del sólido:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_i$$

Las magnitudes \mathbf{v}_i pueden ser consideradas como “velocidades virtuales” compatibles. Análogamente, los desplazamientos virtuales compatibles son:

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{r}_O + \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i$$

para valores arbitrarios pequeños de $\delta \mathbf{r}_O$ y $\delta \boldsymbol{\varphi}$.

Expresamos ahora el trabajo virtual:

$$\delta W = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_O + \sum_i (\delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{F}_i$$

denominando

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\mathbf{M}_O \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{\text{ext}},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \delta \varphi \cdot \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_O + \mathbf{M}_O \cdot \delta \varphi\end{aligned}$$

Puesto que $\delta \mathbf{r}_O$ y $\delta \varphi$ pueden tomar valores arbitrarios, se deduce inmediatamente que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio son $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$, que coinciden precisamente con las ecuaciones cardinales de la estática, (3.23) y (3.24). Al contrario de la observación realizada entonces para un sistema general, en este caso particular (sólido rígido) hemos concluido, gracias al principio de los trabajos virtuales, que las ecuaciones no son sólo necesarias sino también suficientes. Resumiendo, podemos afirmar:

En un sólido rígido la condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que el Sistema de Vectores Deslizantes formado por las fuerzas externas sobre el sólido sea un sistema nulo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{ext} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Podríamos haber alcanzado esta misma conclusión mediante la particularización de las ecuaciones de la dinámica del sólido, (9.1) y (9.2) ó (9.3), para las condiciones de la estática. En efecto, en el equilibrio es $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$, y $\mathbf{H}_G = \mathbf{H}_O = \mathbf{0}$ (constantes), por lo que se deducen de las citadas ecuaciones $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ como condiciones necesarias y suficientes.

Del resultado anterior se pueden deducir diversos corolarios de interés práctico:

COROLARIO 1.- Si sobre un sólido actúa un sistema de fuerzas, éste puede ser sustituido por otro sistema de vectores deslizantes equivalente (es decir, con igual resultante y momento en cualquier punto, lo que se denomina también *equipolente*), sin alterar las condiciones de equilibrio.

En efecto, la diferencia entre los dos sistemas sería un sistema nulo, que como hemos visto no altera el equilibrio.

COROLARIO 2.- Si sobre un sólido actúan dos fuerzas, estará en equilibrio si y sólo si ambas siguen la misma recta de acción, con el mismo módulo y sentidos opuestos.

En efecto, es la única forma de que las dos fuerzas constituyan un sistema nulo.

COROLARIO 3.- Si sobre un sólido actúan tres fuerzas, para que haya equilibrio éstas deben ser coplanarias y cortarse en un mismo punto.

La justificación es evidente, ya que de otra forma es imposible que el sistema resultante sea nulo.

En el caso en que el sólido tenga el movimiento restringido por enlaces o ligaduras, vale la pena distinguir varios casos:

Sólido libre: Los valores de los desplazamientos virtuales $\delta \mathbf{r}_O$ y $\delta \varphi$ son independientes; por tanto para el equilibrio han de ser nulas tanto la resultante como el momento de las fuerzas aplicadas

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Sólido con un punto fijo: En este caso hay un punto O fijo por lo cual podemos tomar $\delta \mathbf{r}_O = 0$; la nulidad del trabajo virtual no impone por tanto restricción alguna sobre \mathbf{F} , siendo la condición de equilibrio

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

Sólido con eje fijo: sea el eje fijo (O, \mathbf{e}) ; los desplazamientos compatibles son por tanto $\delta \mathbf{r}_O \parallel \mathbf{e}$, $\delta \varphi \parallel \mathbf{e}$, por lo que se obtienen las condiciones de equilibrio

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{e} = 0$$

es decir, las proyecciones de \mathbf{F} y \mathbf{M} sobre \mathbf{e} deben anularse para el equilibrio.

3.6.2. Sistemas isostáticos e hiperestáticos

En la estática el objetivo suele ser determinar en primer lugar las configuraciones o cargas exteriores para el equilibrio, para a continuación calcular las reacciones en los enlaces o apoyos.

Los casos particulares comentados en el apartado anterior corresponden a sustentaciones que dejan al sistema con algún grado de libertad. Al permitir el movimiento, se necesita para el equilibrio que una o más componentes de las fuerzas o momentos sea nulo.

Si se aumenta el número de coacciones del sólido, se llega a un punto en que no se permite ningún grado de libertad de movimiento: el sistema estará entonces en equilibrio para cualquier conjunto de cargas exteriores (siempre que no se supere la resistencia de rotura de los enlaces). Es el caso, por ejemplo, de un sólido con un eje fijo por un cojinete cilíndrico,

restringiendo además el movimiento de traslación en la dirección del eje y el de rotación alrededor del mismo. Las reacciones tendrían 6 componentes, que se determinarían mediante las 6 ecuaciones cardinales de la estática (3.23) y (3.24).

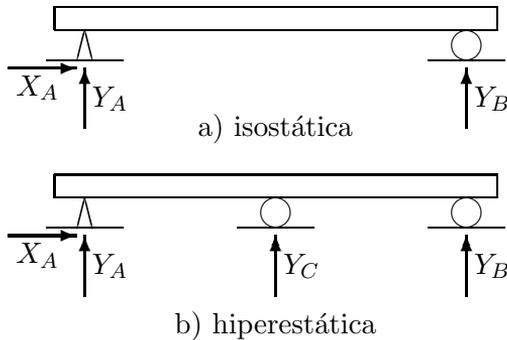


Figura 3.7: *Sustentaciones isostática e hiperestática de una viga: en el segundo caso las ecuaciones de la estática no son suficientes para calcular las reacciones en los apoyos; se dice que existen reacciones “redundantes”.*

Para fijar ideas consideremos un sistema plano, formado por una viga recta biapoyada, en el que uno de los apoyos es una articulación y el otro un apoyo simple que permite el desplazamiento horizontal (figura 3.7_a)

En este caso las tres ecuaciones de la estática ($M = 0$; $F_x = 0$; $F_y = 0$) permiten calcular las tres reacciones incógnitas, X_A , Y_A e Y_B , para cualquier conjunto de cargas exteriores. Decimos que la sustentación es *isostática*, ya que el número de incógnitas a determinar, provenientes de las reacciones de enlace, es igual al número de ecuaciones de la estática.

Imaginemos ahora que a la misma viga se le coloca otro apoyo C intermedio, que restrinja tan sólo el movimiento vertical en ese punto. Para un conjunto dado de cargas exteriores tenemos ahora 4 reacciones incógnitas (X_A, Y_A, Y_B, Y_C) y tan sólo 3 ecuaciones de la estática. Se dice que el sistema es *estáticamente indeterminado o hiperestático*, debido a que posee apoyos redundantes, que “sobran” para garantizar el equilibrio.

Desde el punto de vista de la estática de sistemas rígidos no existe ningún truco ni procedimiento que permita resolver este problema. Está correctamente planteado, ocurriendo que *no tiene solución mediante el sólo empleo de las ecuaciones globales de equilibrio*. Es pues necesario obtener ecuaciones adicionales que proporcionen alguna relación más entre las incógnitas. Estas ecuaciones se obtienen a través de considerar la deformabilidad de la estructura (aplicando las técnicas que se estudian en la resistencia de materiales o en el cálculo de estructuras). A partir del estudio de la deformabilidad de los sólidos y las estructuras, así como de las ecuaciones de comportamiento de las mismas que ligan las deformaciones internas con las tensiones, se obtienen las ecuaciones adicionales necesarias. El estudio de

estos aspectos se halla fuera del alcance de este curso.