Capítulo 4

Oscilaciones lineales con 1 grado de libertad

Índice

Es muy común que un sistema mecánico (sea una estructura o un mecanismo) permanezca en una posición de equilibrio estable, pudiendo realizar sin embargo pequeños movimientos u oscilaciones alrededor de esa posición. Un ejemplo sería un puente, que admite pequeños movimientos debidos al tráfico sobre el mismo. Una variante sería un sistema cuyo movimiento sea una trayectoria determinada, admitiendo pequeñas oscilaciones o variaciones acotadas respecto de la misma. Ejemplo de este caso sería el movimiento de un satélite en órbita.

Los efectos sobre un sistema debido a cargas dinámicas pueden superar notablemente los de las mismas cargas en condiciones estáticas, es decir, aplicadas de forma suficientemente lenta. Los diseños de ingeniería cada vez requieren más garantizar una adecuada respuesta dinámica. Esto puede deberse tanto a que las cargas realmente se apliquen de forma muy rápida, como al hecho de asignar una mayor importancia a aspectos como el mantenimiento de la funcionalidad, la resistencia, y el confort ante las vibraciones. Estas condiciones de diseño a menudo se añaden a las puramente estáticas, de estabilidad y resistencia en la posición de equilibrio.

En la mayoría de los casos prácticos, estas pequeñas oscilaciones se pueden considerar como «lineales» (más adelante se precisa el significado de este término) pudiéndose analizar mediante la teoría que se expone en este capítulo y en el capítulo 5 para sistemas con varios grados de libertad.

Comenzamos aquí por los casos más simples de oscilaciones, los sistemas con un grado de libertad. Aunque en la realidad casi todos los casos tienen varios grados de libertad, en numerosas situaciones existe un grado de libertad predominante, pudiéndose despreciar los otros «modos de vibración» en una primera aproximación. Será válido en estos casos el estudio como sistema de un grado de libertad. En cualquier caso, los modelos con un grado de libertad serán la base para el estudio de las oscilaciones con varios grados de libertad que se tratan más adelante (capítulo 5).

4.1. El oscilador armónico simple

4.1.1. Ecuación del movimiento

Sea una masa puntual, m, obligada a moverse según una recta fija, sujeta a un punto dado de la misma por medio de un resorte elástico (es decir, un muelle que ejerce una fuerza proporcional a su elongación), de constante k, sin que existan otras fuerzas aplicadas. Si se denomina x la coordenada de m a lo largo de la recta, el resorte elástico ejerce una fuerza recuperadora, que se opone a la elongación, de valor

$$F = -k(x - x_0),$$

siendo x_0 la que se denomina *longitud natural* del resorte, para la cual éste quedaría sin tensión. El signo ha de ser negativo puesto que la fuerza del resorte tiene sentido contrario a la elongación, es decir, es una resistencia interna que se opone a ella.

Decimos que se trata de un resorte lineal, porque la fuerza desarrollada en el mismo depende linealmente de la elongación: a doble elongación, doble fuerza, y a elongación mitad, la fuerza se divide por dos.

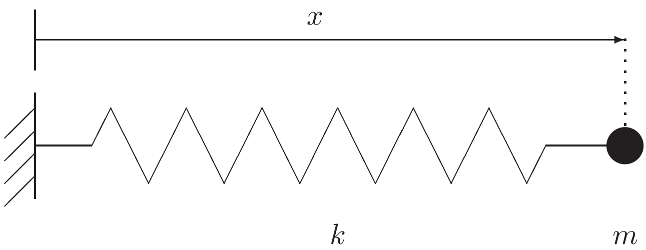

Figura 4.1: *Oscilador armónico simple*

Como podemos elegir el origen de coordenadas donde nos plazca, lo haremos en el punto x_0, de forma que la expresión de la fuerza del muelle sea

$$F = -kx.$$

Aplicando el principio de la cantidad de movimiento (1.2), obtenemos la ecuación dinámica de este sistema:

$$m\ddot{x} = -kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \tag{4.1}$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria con las siguientes características:

- de *segundo orden*, ya que intervienen derivadas segundas;
- *lineal*, ya que así es la dependencia en relación con la variable x y sus derivadas;
- de *coeficientes constantes*, pues supondremos fijos m (masa del sistema) y k (rigidez del resorte);
- *homogénea*, pues la ecuación está igualada a cero, sin término independiente a la derecha del signo igual.

4.1.2. Energía

Antes de proceder a integrar la ecuación, conviene analizar la energía asociada al resorte. La fuerza del muelle es conservativa, asociada a un potencial $V(x)$. Éste se calcula inmediatamente integrando el trabajo realizado por aquélla entre la posición natural y una posición genérica:

$$V = -\int_0^x F \, \mathrm{d}x = -\int_0^x (-kx) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2.$$

Al ser la fuerza conservativa, la energía total se conserva, siendo su valor en un instante genérico

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad \text{(cte.)} \tag{4.2}$$

Si el movimiento es oscilatorio y acotado, la elongación $x(t)$ tendrá máximos en los que la derivada es nula ($\dot{x} = 0$). Particularizando para uno de estos instantes, podemos escribir la ecuación (4.2) en función de una nueva constante A cuya interpretación es la elongación maxima:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{4.3}$$

Físicamente, podemos interpretar la ecuación anterior observando que en los puntos de elongación máxima toda la energía es potencial ($V_{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2$), mientras que en los puntos de elongación nula toda la energía es cinética ($T_{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2$). A lo largo del movimiento, la energía total se conserva, oscilando entre estas dos formas.

4.1.3. Integración de la ecuación

El objetivo es resolver la ecuación (4.1), integrándola para obtener el movimiento $x(t)$. No se pretende aquí explicar con carácter general los procedimientos de integración de ecuaciones diferenciales con una variable, por lo que nos ceñiremos a los detalles de la solución de ecuaciones del tipo de (4.1), que por otra parte reviste considerable importancia en la física y en la mecánica.

La forma más sencilla es partir de la ecuación (4.3), despejando en ella y separando variables:

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{k}{m}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

La integración se puede hacer para cada miembro de esta ecuación de forma independiente, resultando

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{A},$$

donde φ es una constante de integración. Definimos ahora un nuevo parámetro ω_0 como

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{4.4}$$

con lo cual despejando el valor de x resulta la ecuación del movimiento buscada:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \varphi). \tag{4.5}$$

Esta ecuación define un movimiento armónico (es decir, sinusoidal). Se trata de un movimiento periódico, puesto que se repite idénticamente cada cierto intervalo de tiempo T denominado periodo, de manera indefinida. En este caso el periodo es $T = 2\pi/\omega_0$.

El parámetro ω_0 recibe el nombre de *pulsación* o *frecuencia angular natural* del sistema; representa la frecuencia angular con la que éste oscila cuando se le separa de su posición de equilibrio y se le libera para que se mueva libremente[1]. La constante A es la *amplitud* de la oscilación (módulo de la elongación máxima) y por último φ es el *ángulo de fase*, ya que indica la fase de la sinusoide en que se sitúa el origen de tiempo.

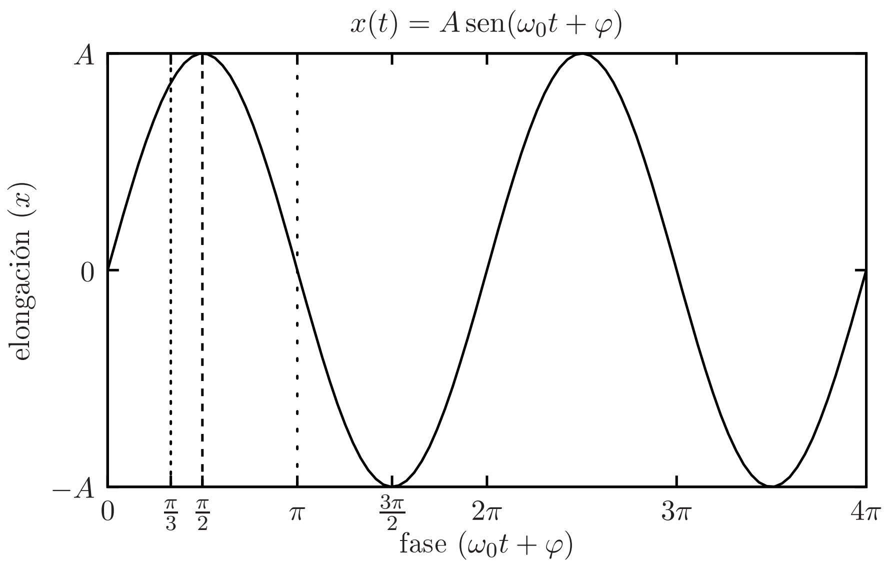

Figura 4.2: *Oscilación armónica, abarcando dos periodos completos del movimiento. Un ángulo de fase $\varphi \neq 0$ equivale simplemente a una traslación del origen de tiempos.*

La frecuencia angular o pulsación se mide en radianes/segundo. La fre-

[1]En contra de lo que pudiera parecer, la notación ω_0 no indica «valor inicial de ω», tratándose de un valor característico del sistema que se mantiene *constante*. El subíndice en ω_0 se refiere a que el sistema no tiene amortiguamiento, en comparación con la frecuencia característica ω que obtendremos para los sistemas con amortiguamiento, ver ecuación (4.11).

cuencia circular f —o frecuencia propiamente dicha—, indica el número de ciclos o revoluciones por unidad de tiempo, y se expresa mediante Hercios o ciclos por segundo (Hz). La relación entre ambas medidas de la frecuencia es por tanto $f = \omega/2\pi$. También es posible expresar la frecuencia en otras unidades como revoluciones por minuto (rpm).

Es inmediato observar de (4.5), que cuanto más rígido sea el muelle (mayor k) o más ligera la masa (menor m), mayor será la frecuencia natural de oscilación ω_0. Por el contrario, sistemas más flexibles (k pequeño) y más masivos (m grande) tendrán frecuencias naturales bajas.

Si el valor de la constante k fuese negativo, esto correspondería a una repulsión del resorte, y no sería posible la solución anterior al no poderse obtener $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Físicamente, este caso no correspondería a un movimiento de oscilación, ya que la partícula tendería a alejarse cada vez más del origen, sin estar su movimiento acotado. Por tanto, para que el sistema tenga un movimiento oscilatorio acotado ha de poseer una rigidez k positiva, correspondiente a una atracción hacia la posición de equilibrio estable.

Los dos parámetros A y φ quedan indeterminados en (4.5), siendo necesario calcularlos a partir de las dos condiciones iniciales (posición y velocidad iniciales). Por ejemplo, para una vibración que parte desde una elongación inicial a en reposo,

$$x_0 = a; \quad \dot{x}_0 = 0 \quad \Rightarrow \qquad A = a, \quad \varphi = \pi/2.$$

Para unas condiciones iniciales cualesquiera x_0 y v_0, particularizando (4.5) se halla

$$x_0 = A \operatorname{sen}\varphi; \quad v_0 = A\omega_0 \cos\varphi\,,$$

$$A = \frac{x_0}{\operatorname{sen}\varphi}\,; \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0 x_0}{v_0}\right)\,.$$

Como comprobación, podemos evaluar la energía asociada al movimiento definido por (4.5). En un instante genérico, la velocidad es

$$\dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

por lo que

$$T + V = \frac{1}{2}\underbrace{m\omega_0^2}_{=k} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2.$$

Como era de esperar se obtiene el mismo valor que en (4.3).

4.2. Oscilaciones con amortiguamiento

4.2.1. Ecuación del movimiento

Un amortiguador viscoso ejerce una fuerza de resistencia pasiva proporcional a la velocidad, $F_A = -c\dot{x}$, de sentido contrario a ella. Este modelo

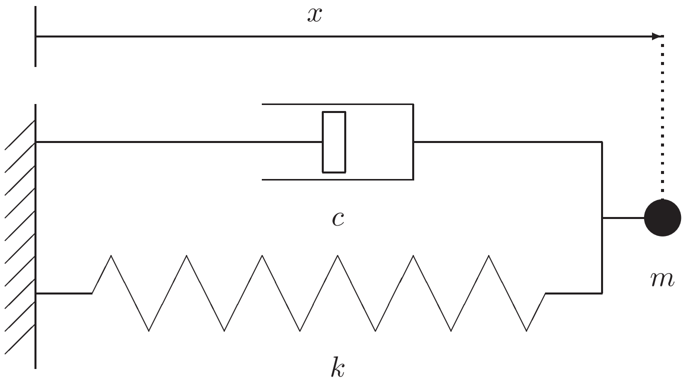

Figura 4.3: *Oscilador con amortiguamiento viscoso*

corresponde aproximadamente a la resistencia desarrollada por un émbolo en un pistón lleno de líquido, al fluir por el hueco libre entre pistón y émbolo. Se trata de una fuerza necesariamente *no conservativa*. Es fácil comprobarlo, ya que en cualquier trayectoria cerrada (origen y final en el mismo punto), el trabajo realizado por la fuerza de amortiguamiento es esencialmente negativo:

$$W_A = \oint (-c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\,\mathrm{d}x = \oint (-c\dot{x}^2)\,\mathrm{d}t < 0.$$

Aunque este modelo no representa de forma exacta la mayoría de las resistencias pasivas reales, resulta sencillo y suficientemente aproximado para una gran cantidad de casos prácticos, permitiendo considerar las inevitables resistencias del medio en que se produce la vibración.

Considerando la fuerza del amortiguador, y tomando el origen de coordenadas en la posición natural del resorte, la fuerza total sobre m es ahora

$$F = -c\dot{x} - kx,$$

resultando la ecuación:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \tag{4.6}$$

Esta sigue siendo una ecuación diferencial de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogénea.

4.2.2. Integración de la ecuación

La solución de la ecuación (4.6) es del mismo tipo que en el caso anterior sin amortiguamiento (4.1), es decir, basada en funciones armónicas. Tan sólo será necesario aquí generalizar algo la expresión de las soluciones ensayadas, para lo cual emplearemos una exponencial del tipo $x(t) = a\mathrm{e}^{rt}$, basándonos en la generalización de las funciones armónicas mediante la notación de Euler de la exponencial imaginaria[2]. En principio, permitiremos que tanto $a \in \mathbb{C}$ como $r \in \mathbb{C}$ sean números complejos, aunque por motivos físicos deberemos exigir al final que el resultado $x(t)$ sea real.

Derivando y sustituyendo en la ecuación (4.6), resulta

$$(mr^2 + cr + k)\mathrm{e}^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \qquad mr^2 + cr + k = 0. \tag{4.7}$$

Esta expresión se denomina «ecuación característica,» proporcionando los valores que debe tomar r para que exista la solución buscada:

$$r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}. \tag{4.8}$$

Según el valor del discriminante $(c^2 - 4km)$ en la expresión general anterior, pueden distinguirse varios tipos de solución:

a) $\underline{c^2 - 4km > 0}$**.-** En este caso existen dos raíces reales para r en (4.7):

$$r_1 = -p, \quad r_2 = -q.$$

Sabemos que necesariamente ambas han de ser negativas, ya que empleando la expresión (4.8) se comprueba que $r_1 + r_2 < 0$ y $r_1 \cdot r_2 > 0$. Mediante la linealidad de la ecuación diferencial se demuestra que, si existen varias soluciones, cualquier combinación lineal de ellas es también solución de la ecuación (propiedad de comprobación inmediata). Por tanto, la solución general será:

$$x(t) = a_1\mathrm{e}^{-pt} + a_2\mathrm{e}^{-qt}.$$

En definitiva, se trata de una solución exponencial decreciente, que no ocasiona movimiento oscilatorio, debido a que el amortiguamiento c es excesivamente grande (amortiguamiento *supercrítico*). En la figura 4.4 se muestra el movimiento que se obtiene para un sistema de este tipo, en varios casos con distintas condiciones iniciales.

---

[2] Empleando la notación de Euler, $\mathrm{e}^{\theta i} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, siendo $i = \sqrt{-1}$.

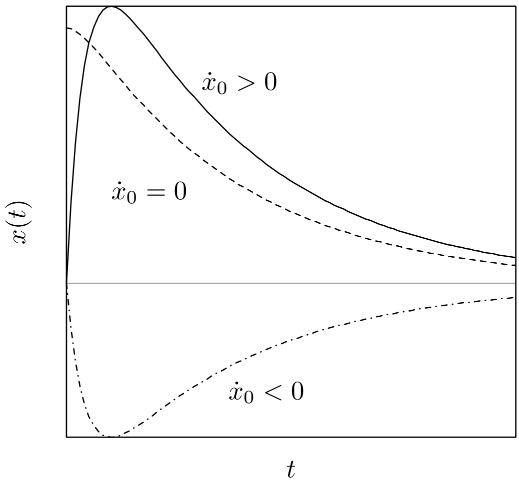

Figura 4.4: *Movimiento de un sistema definido por la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, con amortiguamiento supercrítico ($c > 2\sqrt{km}$), bajo distintas condiciones iniciales; Caso I) $\dot{x}_0 > 0$, Caso II) $\dot{x}_0 = 0$, Caso III) $\dot{x}_0 < 0$.*

b) $\underline{c^2 - 4km = 0}$**.-** Se trata del caso límite, en el que el amortiguamiento posee el valor crítico $c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km}$. Existe una raíz real doble en (4.7), negativa al igual que antes:

$$r = -\frac{c}{2m} = -p,$$

correspondiendo a la solución $x(t) = a\mathrm{e}^{-pt}$. Se puede comprobar que $x = bt\mathrm{e}^{-pt}$ también es solución, por lo que la solución general será una combinación de estas dos:

$$x = (a + bt)\mathrm{e}^{-pt}.$$

Comprobamos por tanto que en este caso tampoco se produce un movimiento de tipo oscilatorio.

c) $\underline{c^2 - 4km < 0}$**.-** Se obtienen en este caso dos raíces complejas conjugadas para (4.7),

$$r_1 = -p + \omega i, \quad r_2 = -p - \omega i,$$

siendo

$$p = \frac{c}{2m}, \quad \omega = \sqrt{-\frac{c^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}.$$

La parte real de la solución es negativa, dando lugar a una exponencial decreciente, que multiplica a una función armónica:

$$\begin{aligned} x &= a_1\mathrm{e}^{(-p+i\omega)t} + a_2\mathrm{e}^{(-p-i\omega)t} \\ &= \mathrm{e}^{-pt}(a_1\mathrm{e}^{i\omega t} + a_2\mathrm{e}^{-i\omega t}) \\ &= \mathrm{e}^{-pt}[(a_1 + a_2)\cos\omega t + i(a_1 - a_2)\,\mathrm{sen}\,\omega t] \end{aligned}$$

Aunque en un caso general esta expresión pueda tener componente imaginaria, por motivos físicos sabemos que x debe ser real. Esto obliga a que las constantes complejas $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ den lugar a unas nuevas constantes reales $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = (B - iA)/2 \\ a_2 = (B + iA)/2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} B = a_1 + a_2 \\ A = i(a_1 - a_2) \end{array}\right\}$$

resultando

$$x = \mathrm{e}^{-pt}(A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t). \tag{4.9}$$

Otra forma equivalente de expresar esta solución es mediante el cambio de las constantes (A, B) a otras (a, φ) definidas por:

$$A = a \cos \varphi; \quad B = a \operatorname{sen} \varphi,$$

resultando la expresión

$$\boxed{x = a\mathrm{e}^{-pt} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi).} \tag{4.10}$$

Este último caso de amortiguamiento subcrítico ($c < c_{\text{crit}}$) es el que más nos interesa, ya que es el único en que se produce un movimiento oscilatorio, de vibraciones alrededor de la posición de equilibrio. La expresión (4.10) representa un movimiento oscilatorio amortiguado de amplitud decreciente ($a\mathrm{e}^{-pt}$), al estar modulado por una exponencial negativa. Aunque el movimiento es oscilatorio, no sería correcto en rigor llamarlo periódico, ya que cada oscilación es distinta, al disminuir la amplitud. Se define como amplitud (de forma más rigurosa, «pseudo-amplitud») del movimiento al valor $a\mathrm{e}^{-pt}$, que tiende a 0 para $t \to \infty$. El movimiento desaparece en la práctica para un tiempo suficientemente grande. Es fácil comprobar que el intervalo entre máximos, al igual que entre pasos por cero, es constante e igual a $T = 2\pi/\omega$ (periodo de la oscilación). Por tanto, a ω se le llama frecuencia angular natural del sistema amortiguado (con mayor rigor formal «pseudo-frecuencia»).

El parámetro a representa la amplitud inicial y φ el ángulo de fase. Estas dos constantes (o alternativamente las A y B si se opta por la otra representación de la solución, definida mediante (4.9)) se calculan a partir de las condiciones iniciales $(x_0, \dot{x}_0)$.

En resumen, en función de los parámetros del problema, la solución quedará expresada como:

$$\boxed{x = a\mathrm{e}^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}.} \tag{4.11}$$

A menudo es útil emplear una notación alternativa para estas expresiones, en función de la frecuencia natural sin amortiguamiento $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$ (ecuación (4.5)), y la denominada *tasa de amortiguamiento crítico* ξ, definida como la razón entre el amortiguamiento c y el valor crítico del mismo c_{crit},

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

El significado de ω_0 ya se discutió antes. En cuanto a ξ, se trata de un valor adimensional, que para los sistemas oscilatorios (amortiguamiento subcrítico) se halla entre 0 y 1. En el caso en que fuese $\xi \geq 1$ el amortiguamiento sería crítico o supercrítico y no se producirían oscilaciones. Para vibraciones estructurales, los valores usuales de ξ son pequeños: en una estructura real puede ser del orden de $\xi = 0{,}02 = 2\,\%$ o menor[3].

En función de estos parámetros, la ecuación diferencial (4.6) se puede escribir

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.12}$$

mientras que la solución (4.11) se expresa como

$$\boxed{x = a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi), \quad \text{con } \omega \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0\sqrt{1-\xi^2}.} \tag{4.13}$$

Se observa inmediatamente que la pseudo-frecuencia ω de este movimiento es menor que en el caso sin amortiguamiento (ω_0), debido al factor $\sqrt{1-\xi^2} < 1$. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos, al ser ξ pequeño, ambos valores resultan muy próximos ($\omega \approx \omega_0$).

Una forma práctica eficaz de medir el amortiguamiento es observando la disminución de la amplitud de las vibraciones libres, en un determinado número de oscilaciones n. Aplicando la ecuación (4.13) el cociente entre los dos instantes será

$$\frac{a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}}{a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0(t+nT)}} = \mathrm{e}^{\xi\omega_0 nT}$$

tomando logaritmos y considerando $T = 2\pi/(\omega_0\sqrt{1-\xi^2})$ se obtiene el denominado *decremento logarítmico*, que representa la disminución de la amplitud entre dos máximos consecutivos:

$$\delta = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx 2\pi\xi \quad (\text{para } \xi \ll 1)\,. \tag{4.14}$$

[3]Por ejemplo, en la nueva norma para acciones de cálculo de puentes de ferrocarril, en los que las acciones dinámicas cobran especial relevancia para trenes de alta velocidad, se proponen amortiguamientos de $\xi = 0{,}5\,\%$ para puentes metálicos o mixtos, y $\xi = 2{,}0\,\%$ para puentes de hormigón estructural

EJEMPLO 4.1: Una masa m de 400 kg puede deslizar sin rozamiento sobre un eje horizontal, unida mediante un resorte elástico de constante $k = 10^5$ N/m a una base fija en el eje. Existe además un amortiguamiento viscoso, que reduce la amplitud de la oscilación a la centésima parte cada 10 s. Se pide:

a. Valor de la constante c de amortiguamiento y de la tasa ξ respecto del crítico;

b. Suponiendo que parte de $x_0 = 0{,}05$ m medido desde la posición de equilibrio en reposo, obtener la ecuación del movimiento así como el valor numérico de la posición al cabo de 2 s;

Solución.

a.— El movimiento es un caso de vibraciones libres con amortiguamiento, dado por la ecuación (4.13):

$$x = a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\operatorname{sen}(\omega t + \phi_0).$$

El valor de la frecuencia natural del sistema sin amortiguar es

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} = 15{,}811388\,\mathrm{rad/s} = 2{,}51646\,\mathrm{Hz}. \tag{4.15}$$

El decremento de la pseudo-amplitud permite calcular la razón de amortiguamiento:

$$a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0\cdot 10} = \frac{a}{100} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{\ln 100}{10\omega_0} = 0{,}029126 \approx 2{,}9\,\%. \tag{4.16}$$

La constante de amortiguamiento vale $c = 2\xi\omega_0 = 368{,}4136\,\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-1}}$. El decremento logarítmico vale

$$\delta = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0{,}1831\,.$$

(Se comprueba que la aproximación $\delta = 2\pi\xi = 0{,}1830$ sólo difiere en el cuarto dígito.)

b.— Una vez calculados todos los parámetros, se pueden obtener las constantes a partir de las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\operatorname{sen}\phi_0 \\ 0 &= -A\xi\omega_0\operatorname{sen}\phi_0 + A\omega\cos\phi_0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} A &= 0{,}05002122 \\ \phi_0 &= 1{,}541667 = 0{,}490728\pi \end{aligned}\right.$$

La expresión numérica de la solución es por tanto

$$x(t) = 0{,}05002122\,\mathrm{e}^{(-{,}4605170\,t)}\ \mathrm{sen}(15{,}80468\,t + 1{,}541667), \qquad (4.17)$$

y la posición a los dos segundos $x(2) = 0{,}01964561\,\mathrm{m}$. Los resultados se muestran de forma gráfica en la figura 4.5. □

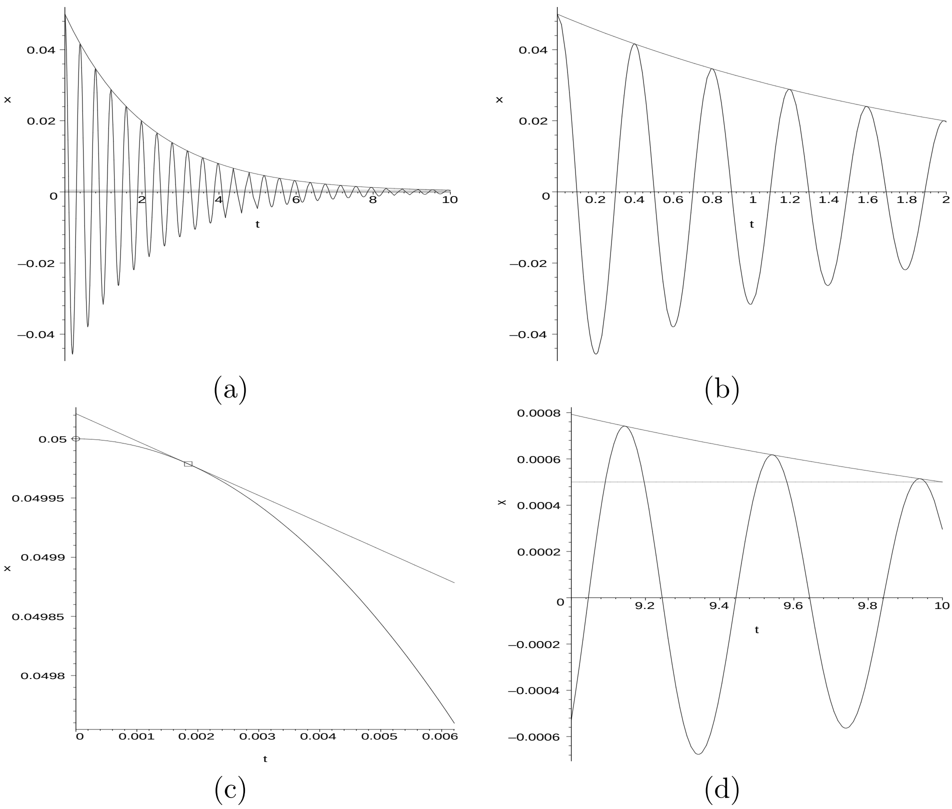

Figura 4.5: *Resultados del ejemplo 4.1: (a) Gráfica para* $t \in [0, 10]$*; (b) Detalle de la gráfica para* $t \in [0, 2]$*, en la que se aprecian mejor las oscilaciones amortiguadas; (c) Detalle del comienzo del movimiento (duración = 1/64 periodos) en el que se aprecia que en el instante inicial la curva no es tangente a la envolvente de pseudo-amplitud, junto con el punto de tangencia en que* $(\omega t + \phi_0) = \pi/2$*; (d) Detalle de la fase final (*$t \in [9, 10]$*) comprobando que se alcanza la centésima parte de la elongación inicial (recta horizontal).*

4.3. Oscilaciones forzadas

4.3.1. Ecuación del movimiento

En este caso consideramos que sobre la masa m actúa una fuerza externa $f(t)$, además de las fuerzas internas antes descritas correspondientes al muelle y al amortiguador (figura 4.6).

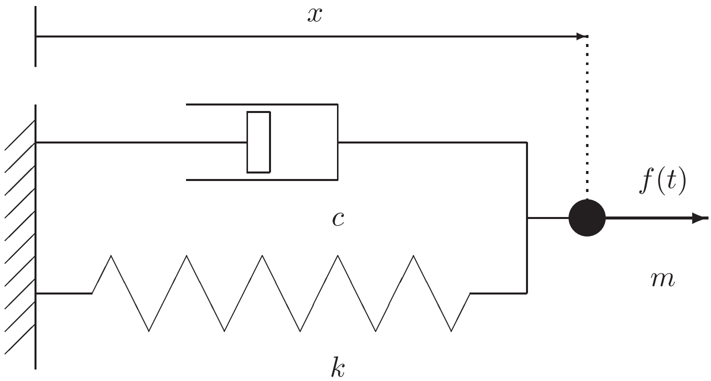

Figura 4.6: *Oscilador simple con amortiguamiento sometido a fuerza externa.*

La ecuación es ahora:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t). \tag{4.18}$$

Al incluir el término independiente $f(t)$ la ecuación diferencial deja de ser homogénea. Esto da lugar a una estructura distinta para la solución, como se ve a continuación.

4.3.2. Integración de la ecuación

Sean dos soluciones cualesquiera $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de la ecuación completa (4.18):

$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + x_2 = f(t),$$
$$m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + x_1 = f(t);$$

restando término a término se obtiene

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0.$$

Por tanto su diferencia, $x_h(t) = x_2(t) - x_1(t)$, es solución de la ecuación homogénea (4.6). Esto nos sirve para poder expresar la solución general de la completa como una solución particular $x_p(t)$ de la misma, que ya veremos cómo se puede hallar, más la solución general de la homogénea $x_h(t)$ que ya sabemos calcular:

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)\,.} \tag{4.19}$$

El problema se limita pues a calcular una solución particular $x_p(t)$ de (4.18). Cualquier procedimiento práctico que nos permita hallarla será válido. Como regla general, buscaremos una solución particular del mismo tipo que el término de fuerza $f(t)$. Veremos a continuación las soluciones particulares para algunos casos significativos.

a) fuerza constante, $f(t) = D$.— Este caso puede corresponder a una fuerza estática, si su aplicación ha sido lenta, o a una función escalón dinámica, en el caso en que la aplicación sea súbita. En cualquier caso, la solución particular es otra constante, de valor

$$x_p = \frac{D}{k}\,.$$

La comprobación es inmediata, al ser $\dot{x}_p = \ddot{x}_p = 0$.

Como ejemplos concretos de este caso se pueden citar el de un muelle en posición vertical sujeto a la gravedad, o la fuerza de rozamiento durante el intervalo en que no cambia de signo (supuesta la reacción normal constante).

Por otra parte, llamando $x_0 = D/k$ (cte.), la adición de una solución $x_p = x_0$ puede interpretarse también como una simple traslación del origen de coordenadas, $x'(t) = x(t) - x_0 = x_h(t)$. De esta forma el movimiento puede describirse como una oscilación libre alrededor de un nuevo origen de coordenadas, trasladado x_0.

Esta puede ser la interpretación, por ejemplo, de una masa m colgando de un resorte de constante k en dirección vertical, sometida a su propio peso (mg). El movimiento puede interpretarse como una oscilación libre, alrededor de un punto de equilibrio situado la distancia mg/k por debajo del punto de longitud natural del muelle.

b) fuerza lineal, $f(t) = Et$.- Se trata de una fuerza que aumenta o disminuye linealmente con el tiempo. Tanteamos la solución $x_p = mt + n$, también lineal. Sustituyendo en (4.18) se obtienen los valores de m y n:

$$cm + k(mt+n) = Et \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = E/k \\ n = -cE/k^2, \end{cases}$$

por lo que resulta

$$x_p = \frac{E}{k}\left(t - \frac{c}{k}\right).$$

Este caso sirve para definir un tramo en forma de rampa en una función de fuerza.

c) fuerza armónica, $f(t) = q \operatorname{sen} \Omega t$.- Este caso tiene especial importancia, ya que no sólo sirve para una fuerza armónica en sí misma, sino que servirá también como base para calcular la solución frente a una carga cualquiera, mediante el desarrollo en serie de Fourier[4].

Tanteamos una solución que sea igualmente armónica, con la misma frecuencia que la excitación, pero admitiendo un posible desfase δ respecto de la carga:

$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(\Omega t + \delta).$$

Sustituyendo en (4.18):

$$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) + c\Omega \cos(\Omega t + \delta) = \frac{q}{A} \operatorname{sen} \Omega t,$$

y particularizando para dos valores distintos de t se puede calcular A y δ:

1. para $\underline{t = 0}$,

$$(k - m\Omega^2) \operatorname{sen} \delta + c\Omega \cos \delta = 0,$$

y despejando δ,

$$\boxed{\tan \delta = -\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2} = -\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}} \tag{4.20}$$

2. para $\underline{\Omega t + \delta = 0}$,

$$\begin{aligned} c\Omega &= \frac{q}{A} \operatorname{sen}(-\delta) \\ A &= -\frac{q}{c\Omega} \operatorname{sen} \delta \end{aligned}$$

Para expresar A en función de los parámetros del problema, debemos obtener en primer lugar la expresión de $\operatorname{sen} \delta$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \delta &= \frac{\tan \delta}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 \delta}} \\ &= \frac{-c\Omega}{\pm\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \\ &= \frac{-2\xi\Omega\omega_0}{\pm\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

[4]Consultar *Curso de Mecánica*, J.M. Goicolea (2010), apartado 3.7

resultando finalmente las expresiones siguientes para A:

$$A = \frac{q}{\pm\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} = \frac{q/m}{\pm\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}}. \tag{4.22}$$

Debido a la indeterminación del signo de la raíz en las expresiones anteriores ((4.21) para $\operatorname{sen}\delta$ y (4.22) para A), podría resultar un valor negativo para esta última constante. A veces es conveniente sin embargo tomar el signo de la raíz que hace A positivo, concordando con su interpretación física como amplitud. Esto obligaría a su vez a tomar el valor apropiado para δ, de forma que $\operatorname{sen}\delta$ tenga el signo que le corresponde. Conviene observar que para cambiar de signo $(\operatorname{sen}\delta)$ basta con tomar $(\delta+\pi)$ en lugar de δ, es decir, se trata de un simple cambio del origen de tiempo, lo que siempre es lícito.

Una vez conocidos A y δ es posible escribir la solución general de la ecuación completa (4.18) que resulta:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{a\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}_{\text{sol. gral. homogénea}} + \underbrace{A\operatorname{sen}(\Omega t + \delta)}_{\text{sol. part. completa}}.} \tag{4.23}$$

En esta expresión quedan tan sólo por determinar los parámetros a y φ, que se obtendrán particularizando para las condiciones iniciales. Conviene subrayar que, aunque estos parámetros afectan sólo a la parte de la solución que proviene de la homogénea, es la solución completa (4.23) la que se debe particularizar. No debe cometerse el error de particularizar el sumando correspondiente a la solución homogénea, sino que debe ser la suma de ambas.

Por otra parte, es importante observar que la solución particular de la completa que hemos obtenido es *independiente de las condiciones iniciales*, al ser función únicamente de los parámetros A y δ, definidos por las expresiones (4.21) y (4.22) en las que no influyen dichas condiciones iniciales.

Régimen transitorio y permanente.- En el caso en que exista amortiguamiento, la solución de la homogénea al cabo de cierto tiempo —cuánto tiempo sea dependerá del amortiguamiento— desaparece. El intervalo durante el que no se puede despreciar el término correspondiente a la solución de la homogénea, siendo significativos ambos sumandos en (4.23), se llama *régimen transitorio.* El movimiento durante este régimen posee dos componentes armónicas de distinta frecuencia, la de la excitación (Ω) y la natural del sistema en vibración libre (ω).

El régimen permanente es el que se alcanza cuando el término correspondiente a la solución de la homogénea en (4.23) se amortigua hasta hacerse despreciable, quedando tan sólo la solución particular de la completa. Como se ha dicho antes, esta solución particular se puede escoger de forma que no dependa de las condiciones iniciales[5]. Por lo tanto, éstas sólo tendrán influencia durante el régimen transitorio. Dicho de otra manera, en un movimiento forzado y amortiguado, al cabo de un tiempo el movimiento es siempre el mismo independientemente de las condiciones iniciales.

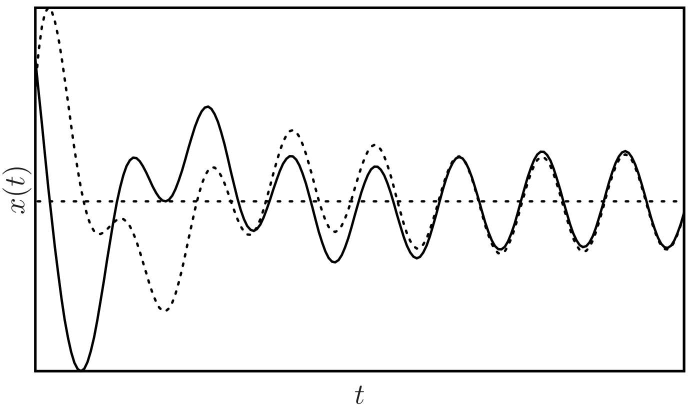

Figura 4.7: *Movimiento oscilatorio forzado, para dos condiciones iniciales distintas; al cabo de cierto tiempo, el régimen permanente es el mismo.*

Para una excitación periódica de tipo armónico, el régimen permanente tiene la misma frecuencia que la excitación, y un desfase δ respecto a ella, dado por la expresión (4.21). De ésta se desprende que si no existe amortiguamiento, el desfase es también nulo. El desfase también depende de la relación entre Ω y ω_0, de forma que, por ejemplo, para $\Omega = \omega_0$, resulta $\operatorname{sen}\delta = \pm 1$ y por tanto $\delta = \pm\pi/2$.

4.4. Amplificación dinámica y resonancia

Una carga aplicada de forma dinámica puede producir un efecto considerablemente mayor que aplicada de forma estática, es decir, suficientemente lenta para que no se llegue a producir oscilación. Este efecto se denomina *amplificación dinámica*.

[5]La elección de solución particular no es única, siendo por tanto también posible escoger ésta de forma que una parte de ella sí dependa del estado inicial; sin embargo, en el límite cuando $t \to \infty$, esta parte de la solución particular también se verá reducida a cero.

Un ejemplo sencillo es la aplicación de una carga constante P_0, sobre un sistema formado por una masa m y un resorte k, sin amortiguamiento. Si se aplica de forma estática (mediante una rampa suficientemente lenta), el desplazamiento sería $x_{\text{est}} = P_0/k$.

Si se aplica de forma súbita, como un escalón de carga, suponiendo que inicialmente el resorte está en su posición natural y sin velocidad, la respuesta es

$$x_{\text{din}}(t) = \frac{P_0}{k} - \frac{P_0}{k}\cos(\omega_0 t).$$

El desplazamiento máximo se produce para $\omega_0 t = \pi$ y vale $x_{\text{din,max}} = 2P_0/k$. Por tanto, la amplificación dinámica de la carga es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = 2,$$

es decir, el efecto dinámico es el doble del estático.

Supongamos ahora que se aplica la misma carga, pero modulada por una función armónica, $P_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$. Supondremos que existe un pequeño amortiguamiento inevitable, por lo que el movimiento llega a un régimen permanente, pero que sin embargo se puede despreciar su efecto en la ecuación de dicho régimen, al ser su valor muy pequeño. Decimos, abusando de la expresión, que es un caso «sin amortiguamiento,» aunque queda claro implícitamente que algún amortiguamiento, por pequeño que sea, ha debido existir para que desaparezcan los términos transitorios. En el régimen permanente la respuesta es un movimiento igualmente armónico, cuya amplitud se puede deducir de la ecuación (4.22):

$$x_{\text{din,max}} = A(\Omega) = \frac{P_0}{k - m\Omega^2}.$$

La amplificación dinamica es

$$\text{f.ampl.} = \frac{x_{\text{din,max}}}{x_{\text{est}}} = \frac{1}{1 - \Omega^2/\omega_0^2}. \tag{4.24}$$

Si $\Omega = 0$, el factor de amplificación es la unidad, como debería ser en buena lógica, al tratarse de una carga estática. Si $\Omega \to \infty$, el factor de amplificación tiende a cero, lo que quiere decir que la excitación es demasiado rápida y el resorte no tiene tiempo para deformarse, la masa no llegaría a moverse. Por último, si $\Omega \to \omega_0$, el factor de amplificación tiende a ∞.

Se denomina *resonancia* al fenómeno por el cual la amplitud de la oscilación se hace máxima para determinadas condiciones de la excitación[6].

Como se ha visto en el ejemplo anterior, la amplitud puede tender a ∞ bajo determinadas circunstancias (ecuación (4.24)). En este caso la resonancia conduciría a un fallo completo del sistema, por una amplitud de movimiento excesiva.

En un caso general con amortiguamiento, la expresión (4.22) proporciona la amplitud (A) del régimen permanente. Utilizando dicha ecuación, es posible dibujar la gráfica de la amplitud obtenida para un valor dado del amortiguamiento (ξ), en función de la frecuencia de excitación (Ω) (figura 4.8). Se observa que para amortiguamiento $\xi \neq 0$ la curva muestra en general un máximo de la amplitud, mientras que para $\xi = 0$ no existe máximo, tendiendo la amplitud resonante a ∞.

Desde un punto de vista de cálculo, la frecuencia de resonancia se obtiene hallando el máximo de (4.22):

$$A = \frac{q/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2}};$$

puesto que el numerador es constante, se busca el mínimo del radicando en el denominador,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2\omega_0^2] = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\xi^2\omega_0^2\Omega = 0,$$

obteniéndose finalmente:

$$\boxed{\Omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}.} \qquad (4.25)$$

La amplitud resonante se obtiene sustituyendo el valor de Ω_r en la expresión (4.22) de A:

$$\boxed{A_r = \frac{q}{c\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{q}{c\omega} = \frac{q/c}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}.} \qquad (4.26)$$

[6]Estrictamente hablando, la definición hecha corresponde a la *resonancia en amplitud.* Cabe definir también la *resonancia en energía cinética,* como aquella que hace máximo $T = m\dot{x}^2/2$, pudiendo demostrarse que corresponde a una frecuencia de excitación igual a ω_0 (frecuencia propia sin amortiguamiento). Si existe amortiguamiento, esta frecuencia de resonancia es ligeramente distinta a la obtenida en (4.25). Al ser la energía potencial proporcional al cuadrado de la elongación, la resonancia en energía potencial equivale a la resonancia en amplitud.

Conviene observar que las expresiones (4.4), (4.11) y (4.25) definen tres frecuencias características del sistema, que ordenadas de mayor a menor quedan:

$$\omega_0 > \overbrace{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}^{\omega} > \overbrace{\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}^{\Omega_r}.$$

Aunque sus valores sean distintos para un caso con amortiguamiento, en los casos prácticos reales, el amortiguamiento ξ suele ser pequeño y las tres frecuencias tienen valores muy próximos. Para los valores usuales del amortiguamiento en vibraciones estructurales (del orden de 1 %–2 % o incluso menores), la resonancia se produce muy próxima a ω_0, como se aprecia en la figura 4.8. Por ello, en la práctica ingenieril a menudo se confunden las dos frecuencias ω_0 y Ω_r. La diferencia de frecuencias es mayor para valores altos del amortiguamiento ξ, aunque entonces también ocurre que la resonancia tiene menor importancia. Si $\xi^2 \geq 1/2$ ($\xi \geq 0{,}71$) no se llega a producir máximo de A, por lo que no hay resonancia. En este caso la función $A(\Omega)$ es monótona decreciente y no tiene máximo local, como puede apreciarse en la figura 4.8.

EJEMPLO 4.2: Como continuación del ejemplo 4.1, resolver las siguientes cuestiones adicionales:

a. Suponiendo ahora que a la base se le comunica un movimiento impuesto armónico, de amplitud 0,05 m y frecuencia 2 Hz, obtener el movimiento tanto durante el régimen transitorio como en el régimen permanente. Como condiciones iniciales, se admitirá que parte del reposo en la posición de equilibrio.

b. Obtener la frecuencia de la excitación anterior que produce la máxima amplitud del movimiento, el valor de dicha amplitud máxima y el factor de amplificación.

Solución.

a.— Sea $x(t)$ el movimiento de elongación del resorte, relativo a la base, y $x_b(t)$ el movimiento impuesto de la base. El movimiento absoluto es por tanto $X(t) = x(t) + x_b(t)$. La ecuación del movimiento es:

$$m\ddot{X} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_b.$$

Teniendo en cuenta $x_b(t) = B\,\mathrm{sen}(\Omega t)$, resulta

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mB\Omega^2\,\mathrm{sen}(\Omega t). \tag{4.27}$$

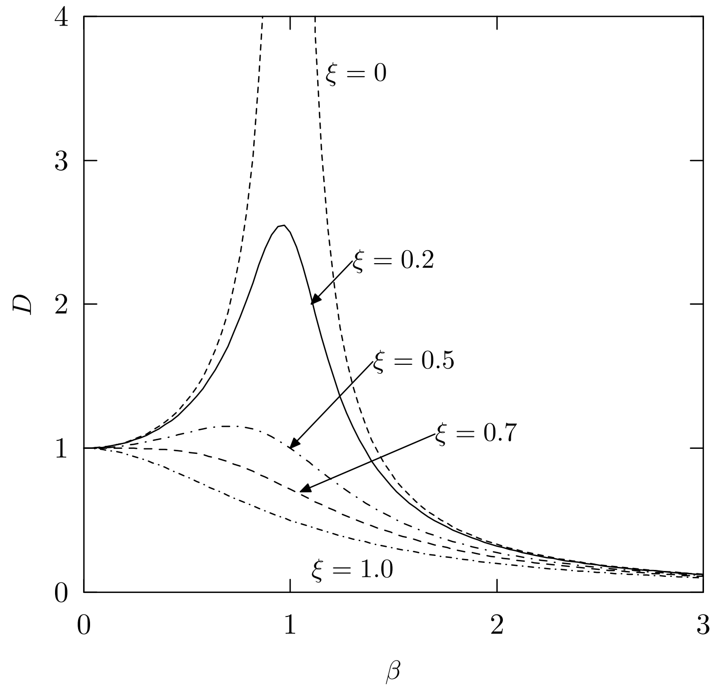

Figura 4.8: *Amplitud de oscilación para una excitación armónica, en función de la frecuencia de excitación* Ω*, para diversos valores del amortiguamiento* ξ*. Los ejes representan magnitudes adimensionales, en abscisas* $\beta = \Omega/\omega_0$*, y en ordenadas* $D = A/(q/k)$ *(factor de amplificación dinámica).*

La solución general consta de la solución general de la homogénea más una solución particular de la completa, $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Suponiendo una solución particular del tipo

$$x_p(t) = C\,\mathrm{sen}(\Omega t + \delta), \tag{4.28}$$

y obligando a que $x(t)$ cumpla la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta &= \arctan\left(\frac{c\,\Omega}{m\,\Omega^2 - k}\right) = -0{,}125031\,\mathrm{rad}; \\ C &= -\frac{m\,B\,\Omega^2}{\sqrt{c^2\,\Omega^2 + (m\Omega^2 - k)^2}} = -0{,}0850728\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

(Estos parámetros podrían haberse deducido también directamente de aplicar las expresiones (4.20) y (4.22), con $q = mB\Omega^2$.) La solución completa de la ecuación es

$$x(t) = C\,\mathrm{sen}(\Omega t + \delta) + A\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi_0). \tag{4.30}$$

Obligando a que cumpla las condiciones iniciales ($x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$), se obtienen las constantes A y ϕ_0:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \arctan\left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\xi^2\omega_0^2}\right) = -0{,}157492\,\mathrm{rad}; \\ A &= -\frac{C\Omega}{\omega} = 0{,}0676418\,\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Con estos datos y los parámetros ξ, ω_0 calculados anteriormente (ecuaciones (4.15) y (4.16)) queda determinada la ecuación del movimiento (4.30):

$$\begin{aligned} x(t) = &-0{,}0850728\,\mathrm{sen}(4\pi t - 0{,}125031) \\ &+ 0{,}0676418\,\mathrm{e}^{-0{,}4605170\,t}\,\mathrm{sen}(15{,}80468\,t - 0{,}157492). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Esta solución es la «completa», que corresponde al llamado *régimen transitorio*. Pasado suficiente tiempo, el segundo sumando en esta expresión (la solución de la homogénea) desaparece, debido a la exponencial decreciente, y queda el denominado *régimen permanente*, que se identifica con la solución particular (4.28). En la figura 4.9 pueden observarse estas dos soluciones. Refiriéndose al régimen permanente, el factor de amplificación dinámica (respecto a la amplitud del movimiento impuesto en la base) es $\mathrm{FA} = 0{,}0850728/0{,}05 = 1{,}701457$.

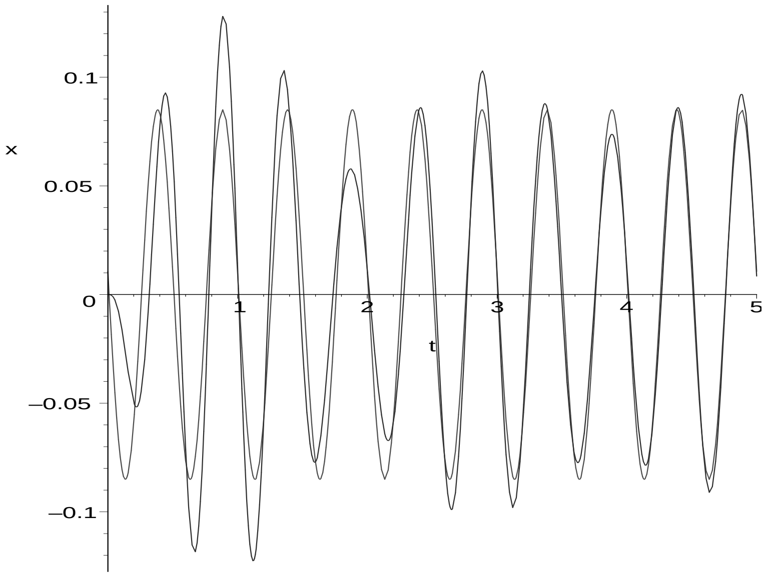

Figura 4.9: *Régimen transitorio y permanente, pudiendo observarse como a medida que avanza el tiempo el movimiento se va aproximando al régimen permanente.*

b.— Para hallar el máximo de la amplitud en régimen permanente, basta con derivar la expresión de C en 4.29_2 e igualar a cero. Desarrollando las operaciones se obtiene la frecuencia de resonancia:

$$\Omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = 15{,}82482\,\mathrm{rad/s}. \tag{4.33}$$

Obsérvese que para este caso en que la excitación es por movimiento armónico en la base la frecuencia de resonancia no coincide con la obtenida anteriormente para una fuerza armónica (4.25). El motivo es que el numerador en la expresión 4.29_2 también depende ahora de Ω, y el máximo no coincide para ambos casos.

Sustituyendo esta frecuencia en 4.29_2 se calcula la amplitud máxima (resonante):

$$C = -0{,}858714\,\mathrm{m}. \tag{4.34}$$

El factor de amplificación lo expresamos en este caso como cociente entre la amplitud dinámica obtenida y la amplitud de la excitación:

$$\mathrm{FA} = \frac{0{,}858714}{0{,}05} = 17{,}17428.$$

En la figura 4.10 se aprecia la variación del factor de amplificación con la frecuencia Ω, marcándose claramante el pico de resonancia. $\square$

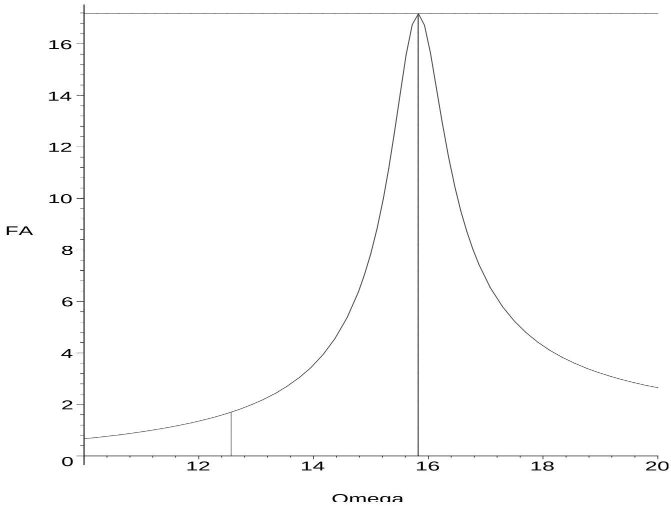

Figura 4.10: *Factor de amplificación dinámica en función de la frecuencia de excitación de la base. Se marcan con líneas verticales la situación para la excitación definida en el primer apartado y la situación de resonancia.*