

Capítulo 7

Ecuaciones de la dinámica del sólido rígido

Índice

7.1. Conceptos generales	7.2
7.1.1. Concepto de sólido rígido	7.2
7.1.2. Ecuaciones cardinales de la dinámica	7.5
7.2. Expresión de las magnitudes cinéticas	7.7
7.2.1. Movimiento de rotación instantánea	7.7
7.2.2. Movimiento general (rotación y traslación)	7.8
7.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo	7.9
7.3. El tensor de inercia	7.10
7.3.1. Concepto y expresiones del tensor de inercia	7.10
7.3.2. Momentos y productos de inercia	7.14
7.3.3. Elipsoide de inercia	7.17
7.3.4. Ejes principales de inercia	7.17
7.3.5. Simetrías de masas	7.21
7.3.6. Campo tensorial de inercia	7.24
7.4. Ecuaciones de la dinámica	7.28
7.4.1. Ecuaciones de Euler	7.28
7.4.2. Ecuaciones de Euler empleando el triedro inter- medio	7.30
7.4.3. Ecuaciones de Lagrange	7.31
7.4.4. Cálculo de reacciones en los enlaces	7.33

7.1. Conceptos generales

7.1.1. Concepto de sólido rígido

Se llama «sólido rígido» a un conjunto de partículas, de número finito o infinito, que a lo largo del movimiento mantengan invariables las distancias entre cada dos de ellas, de manera que se conserve la forma geométrica del sistema y la distribución espacial de su masa.

Es posible caracterizar un sólido rígido \mathcal{B} de dos maneras distintas: como un conjunto de masas puntuales discretas, o mediante una distribución continua de masa. El sólido con *masas discretas* está constituido por un número finito partículas ($m_i, i = 1, \dots, N$) unidas rígidamente entre sí. Este modelo es el seguido en el apartado 1.3 para el estudio de sistemas mecánicos generales. Por otra parte, el sólido con *distribución continua de masa* estará formado por un número infinito de partículas, pudiendo idealizarse como un medio continuo que supondremos además diferenciable. Es decir, se considera el sólido \mathcal{B} como un dominio infinitamente subdivisible en el sentido del cálculo diferencial, mediante elementos infinitesimales de volumen dV en cada partícula del dominio $X \in \mathcal{B}$ y de superficie dS en cada punto del contorno $\partial\mathcal{B}$ (figura 7.1). Admitiremos también que existe una función de densidad de masa ρ que permite expresar las masas elementales como $dm = \rho dV$. En los temas anteriores se ha empleado preferentemente la descripción de los sistemas como masas discretas, sin embargo en este se preferirá el modelo de medio continuo.

De esta forma, la masa total del sólido y el centro de masa se expresa en el modelo discreto como

$$M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad (7.1)$$

mientras que en el modelo continuo es

$$M = \int_{\mathcal{B}} \rho dV, \quad \mathbf{r}_G = \frac{1}{M} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \rho dV. \quad (7.2)$$

Análogamente se pueden expresar en ambos modelos las resultantes de fuerzas y momentos en un punto; según se expuso en el apartado 1.3 para el modelo de masas discretas se consideran solo las fuerzas externas sobre cada partícula, siendo las expresiones

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}}, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (7.3)$$

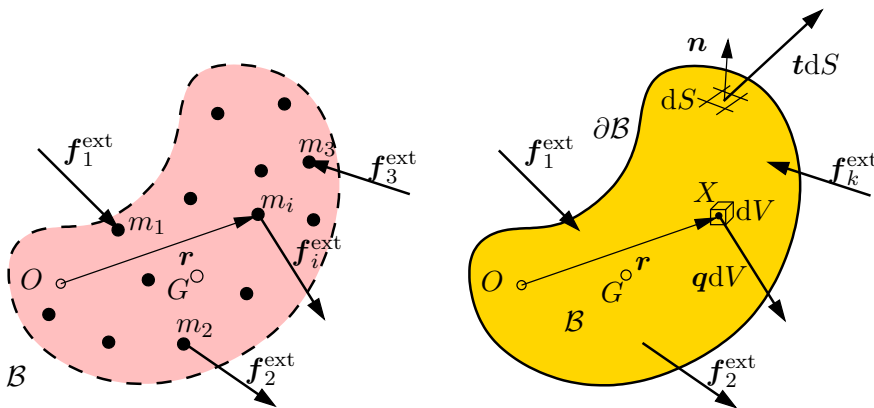


Figura 7.1: Dos modelos de sólido: mediante partículas discretas con masas m_i (izquierda) o como medio continuo con masas elementales $dm = \rho dV$ (derecha). En ambos casos la distancia entre cada dos partículas se debe mantener constante.

Por otra parte, para el sólido como un medio continuo pueden actuar varios tipos de fuerzas exteriores, como se indica en la figura 7.1: las fuerzas distribuidas \mathbf{q} por unidad de volumen en los puntos del interior del dominio \mathcal{B} , las fuerzas aplicadas \mathbf{t} por unidad de superficie en el contorno $\partial\mathcal{B}$, y posiblemente otras fuerzas que se puedan suponer concentradas o puntuales $\mathbf{f}_k^{\text{ext}}$. Así las resultantes se expresan como

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \\ \mathbf{M}_O &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{q} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} dS + \sum_k \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

El ejemplo más común de fuerzas distribuidas es la gravedad, en cuyo caso vale $\mathbf{q} = \rho\mathbf{g}$. Las resultantes debidas a la gravedad se obtienen fácilmente mediante la primera integral de las expresiones (7.4), siendo $\mathbf{F} = M\mathbf{g}$ y $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_G \wedge M\mathbf{g}$. Es decir, se puede considerar su efecto como el del peso del sólido $M\mathbf{g}$ situado en su centro de masa G . También pueden producirse fuerzas de tipo inercial (p.ej. centrífugas) o de otro tipo que no resulten uniformes. En cuanto a fuerzas de superficie \mathbf{t} pueden tratarse de fuerzas debidas a la acción de fluidos circundantes como hidrostáticas o aerodinámicas, contacto y fricción entre superficies etc. En el caso de la presión hidrostática estas fuerzas serán normales a la superficie en cada punto, pero no será necesariamente así en otros casos.

También interesa expresar las magnitudes cinéticas. La expresión de la cantidad de movimiento y del momento cinético con la distribución discreta de masas sería

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{r}}_i, \quad (7.5)$$

mientras que con la distribución continua

$$\mathbf{P} = \int_B m_i \dot{\mathbf{r}} \rho dV = M \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{H}_O = \int_B \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \rho dV. \quad (7.6)$$

Por último, las expresiones de la energía cinética para ambos modelos son

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad T = \int_B \frac{1}{2} v^2 \rho dV. \quad (7.7)$$

Como se vió en el ejemplo 1.3 (figura 1.13), un sólido rígido libre posee seis grados de libertad. Estos se pueden descomponer en dos grupos: tres parámetros que definen la traslación del sólido, (por ejemplo, las coordenadas del centro de masa, X_G, Y_G, Z_G), y tres parámetros angulares que definen la orientación del sólido alrededor de G (por ejemplo, los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) definidos en el apartado 6.3.4).

Las ecuaciones de la dinámica pueden obtenerse aplicando los principios y teoremas generales enunciados en el capítulo 1. En particular, el movimiento se puede resolver aplicando las ecuaciones que se deducen a partir de los principios de la cantidad de movimiento (1.37), momento cinético (1.51) y energía cinética (1.44). Para el movimiento del sólido libre en tres dimensiones, se necesitarán al menos seis ecuaciones independientes. Un procedimiento general para obtener las ecuaciones necesarias y suficientes es la aplicación del principio de D'Alembert, como se ve a continuación.

Quedan fuera del alcance de este capítulo los *sólidos deformables*, como es el caso de los materiales elásticos. La consideración de la deformabilidad de los medios continuos exige introducir medidas de la deformación interna (tensor de deformaciones), así como de las fuerzas internas entre las partículas del sólido (tensor de tensiones) y las ecuaciones que ligan ambas (ecuaciones constitutivas), lo que excede los objetivos de este curso¹.

¹ Véase por ejemplo *Mecánica de medios continuos para ingenieros*, X. Oliver y C. Agelet, Ediciones UPC, Barcelona 2002

7.1.2. Ecuaciones cardinales de la dinámica

Supondremos un sólido rígido con distribución continua de masa, y libre sin enlaces exteriores que restrinjan su movimiento, siendo las únicas ligaduras las internas del propio sólido, de distancia constante. Consideramos desplazamientos virtuales infinitesimales compatibles con estos enlaces. Las expresiones se pueden deducir de forma similar a la ecuación (6.20), aplicada a través del movimiento relativo a G . Para cada partícula $X \in \mathcal{B}$,

$$\delta \mathbf{r}(X) = \delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r}(X) - \mathbf{r}_G) + \delta \mathbf{r}_G, \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta}). \quad (7.8)$$

En esta expresión $\delta \mathbf{r}_G$ responde a desplazamientos virtuales del centro de masa y $\delta \boldsymbol{\theta}$ a rotaciones infinitesimales, siendo ambos vectores arbitrarios.

El principio de D'Alembert (1.94) se expresa resumidamente como

$$\delta W + \delta W^{\text{iner}} = 0, \quad \forall \{\delta \mathbf{r}(X)\} \text{ comp.} \quad (7.9)$$

siendo

$$\delta W = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{r} \, dS + \sum_k \mathbf{f}_k^{\text{ext}} \cdot \delta \mathbf{r}_k \quad (7.10)$$

$$\delta W^{\text{iner}} = - \int_{\mathcal{B}} \rho \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} \, dV \quad (7.11)$$

Al desarrollar estas expresiones empleando (7.8), por ejemplo en la primera integral de (7.10), se puede emplear la propiedad cíclica del producto mixto de vectores,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r} \, dV &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r}_G \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot [\delta \boldsymbol{\theta} \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G)] \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{r}_G \, dV + \int_{\mathcal{B}} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{q}] \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \, dV \\ &= \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \, dV \right) \cdot \delta \mathbf{r}_G + \left(\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge \mathbf{q} \, dV \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Operando de forma similar con los demás términos se obtiene

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_G + \mathbf{M}_G \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \quad (7.13)$$

siendo \mathbf{F} y \mathbf{M}_G las resultantes de fuerzas externas y momentos en G , que se expresan de la misma forma que (7.4) salvo que se toman momentos en G . De forma análoga, desarrollando (7.11) se obtiene

$$\delta W^{\text{iner}} = -M \mathbf{a}_G \cdot \delta \mathbf{r}_G - \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_G \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta}, \quad (7.14)$$

siendo \mathbf{H}_G el momento cinético del sólido en G que se expresa de igual manera que (7.6₂) pero tomando los momentos en G .

Sustituyendo las expresiones (7.13) y (7.14) en (7.9),

$$(\mathbf{F} - M\mathbf{a}_G) \cdot \delta\mathbf{r}_G + (\mathbf{M}_G - \frac{d}{dt}\mathbf{H}_G) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} = 0 \quad \forall(\delta\mathbf{r}_G, \delta\boldsymbol{\theta}). \quad (7.15)$$

Considerando que en esta ecuación $(\delta\mathbf{r}_G, \delta\boldsymbol{\theta})$ son arbitrarios, ya que corresponden a los grados de libertad del sólido, se deducen las denominadas *ecuaciones cardinales* de la dinámica del sólido:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = M\mathbf{a}_G; \\ \mathbf{M}_G = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_G. \end{cases} \quad (7.16)$$

Se trata de dos ecuaciones vectoriales que en el espacio tridimensional equivalen a seis ecuaciones escalares. Al derivarse del principio de D'Alembert, deducimos que son necesarias y suficientes para determinar los seis grados de libertad del movimiento del sólido.

En el caso particular de un sólido con un punto O fijo, los desplazamientos virtuales equivalentes a (7.8) serían $\delta\mathbf{r}(X) = \delta\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{r}(X)$ (tomando en O el origen de coordenadas), y la ecuación del movimiento se reduce a

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O. \quad (7.17)$$

Si se admite que la resultante de las fuerzas exteriores, \mathbf{F} , no depende de la orientación del sólido, sino tan sólo de la posición del centro de masas \mathbf{r}_G y posiblemente del tiempo, la integración de la ecuación (7.16₁) permitiría calcular la trayectoria del centro de masas como si se tratase de una partícula, de forma desacoplada de la ecuación (7.16₂). El movimiento del CDM G se limita por tanto al estudio desacoplado de la ecuación (7.16₁) que es un problema que ya se ha tratado con anterioridad en la dinámica de la partícula (apartado 1.1).

Sería un error sin embargo considerar que el movimiento del sólido se limita a definir el movimiento del centro de masas. Para definir completamente el movimiento faltaría determinar su orientación, mediante la ecuación (7.16₂), ó (7.17) en el caso del sólido con un punto fijo.

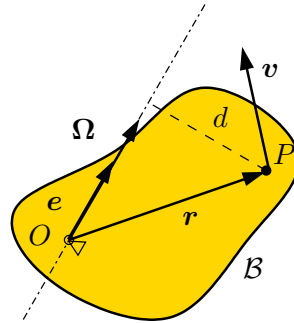
En este capítulo trataremos sobre el planteamiento y resolución de las ecuaciones (7.16₂) ó (7.17). Ambas ecuaciones son formalmente idénticas, definen el mismo tipo de problema: el movimiento de orientación o rotación del sólido alrededor de un punto que puede considerarse fijo, sea éste G u O .

7.2. Expresión de las magnitudes cinéticas

7.2.1. Movimiento de rotación instantánea

Consideremos un sólido \mathcal{B} con un movimiento instantáneo de rotación, alrededor de un eje (O, \mathbf{e}) (figura 7.2), siendo \mathbf{e} un vector unitario, con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$. El eje de rotación (O, \mathbf{e}) de dicho movimiento

Figura 7.2: Sólido \mathcal{B} girando alrededor de un eje dado (O, \mathbf{e}) .



será en general variable a lo largo del tiempo². Al tratarse de una rotación instantánea la velocidad de los puntos del eje es nula, por lo que tomando origen de coordenadas en O la velocidad de un punto P cualquiera del sólido con vector posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}. \quad (7.18)$$

El momento cinético conjunto del cuerpo se puede expresar, sustituyendo (7.18) en la expresión (7.6₂), como

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (7.19)$$

Proyectando sobre el vector unitario \mathbf{e} obtenemos el *momento cinético áxico*:

$$\begin{aligned} H_{O,e} &= \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})] \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \Omega (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \Omega \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho dV \end{aligned} \quad (7.20)$$

donde se ha empleado la propiedad cíclica del producto mixto de vectores, y se denomina $d_e \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{e} \wedge \mathbf{r}|$ a la distancia de cada punto al eje de rotación (O, \mathbf{e}) .

²En caso contrario se trataría de la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, que da lugar como se sabe a un movimiento plano.

En la expresión anterior, la integral que aparece se define como *momento de inercia* del sólido³ respecto al eje (O, \mathbf{e}) :

$$I_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV, \quad (7.21)$$

resultando por tanto a partir de (7.20) la expresión

$$H_{O,e} = I_{O,e} \Omega. \quad (7.22)$$

De la misma manera, la energía cinética, a partir de (7.7₂), resulta

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \rho \, dV = \frac{1}{2} \Omega^2 \int_{\mathcal{B}} d_e^2 \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} I_{O,e} \Omega^2. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Las expresiones anteriores del momento cinético áxico (7.22) y energía cinética (7.23) resultan muy compactas, en función del momento de inercia $I_{O,e}$ respecto del eje instantáneo de rotación. Sin embargo, debe advertirse que al ser este eje (O, \mathbf{e}) variable, el momento de inercia no será tampoco constante, por lo que la utilidad práctica para un movimiento general de dichas expresiones es limitada. Para un caso general es conveniente una descripción de la geometría de masas que permita expresar las magnitudes cinéticas para cualquier orientación del sólido. Esto es precisamente lo que se consigue con el tensor de inercia, tal como se explicará en el apartado 7.3 (expresiones (7.31) y (7.42)).

7.2.2. Movimiento general (rotación y traslación)

En el caso más general en que el movimiento no sea una rotación instantánea sino un movimiento general sin puntos de velocidad nula, el campo de velocidades se puede desarrollar en general a partir del centro de masas (G) . Definiendo la posición relativa al mismo por $\mathbf{r}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r} - \mathbf{r}_G$, y suponiendo que la velocidad instantánea de rotación es $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}'. \quad (7.24)$$

El momento cinético resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge \mathbf{v}_G \rho \, dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho \, dV. \end{aligned} \quad (7.25)$$

³En el caso de un sólido discreto, la expresión del momento de inercia sería $I_{O,e} = \sum_{i=1}^N m_i d_{e,i}^2$.

Proyectando sobre el versor \mathbf{e} de la velocidad de rotación,

$$H_{G,e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_G = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{e} \cdot [\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')] \rho dV = I_{G,e} \Omega, \quad (7.26)$$

donde $I_{G,e}$ es el momento de inercia respecto del eje (G, \mathbf{e}) , que se define análogamente a (7.21), empleando aquí las distancias al eje por G .

El desarrollo de la energía cinética es en este caso

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} v_G^2 \rho dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_G \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') \rho dV + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho dV \quad (7.27) \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,e} \Omega^2. \end{aligned}$$

Es decir, la energía cinética es la suma de dos términos, la que corresponde a la traslación \mathbf{v}_G de su CDM G y la que corresponde a la rotación $\boldsymbol{\Omega}$ del sólido alrededor de un eje por G . Esta expresión es la aplicación del teorema de König (1.53) al caso del sólido.

Debe realizarse aquí la misma advertencia que se hizo al final del apartado anterior, en relación con el valor variable en general del momento de inercia $I_{G,e}$ a emplear en las fórmulas (7.26) y (7.27₃).

7.2.3. Dinámica del sólido con un eje fijo

De las expresiones anteriores se puede obtener de forma directa la ecuación dinámica del caso más sencillo de movimiento de rotación de un sólido, que es cuando el eje de rotación (O, \mathbf{e}) es fijo. Puesto que se trata de un sólido rígido, $I_{O,e}$ es una constante que refleja la distribución de masas del sólido alrededor de dicho eje fijo. Teniendo en cuenta esto, si se deriva (7.22) y empleando (7.17) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H_{O,e} &= I_{O,e} \dot{\Omega} = \frac{d}{dt} (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e} = M_{O,e} \\ &\quad \downarrow \\ M_{O,e} &= I_{O,e} \dot{\Omega}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

En la expresión anterior $M_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}$ es el momento áxico de las fuerzas. Al derivar para obtener esta expresión se ha tenido en cuenta que, el eje (O, \mathbf{e}) es fijo, tanto respecto al sólido como a la referencia absoluta, por lo

que el momento de inercia $I_{O,e}$ se mantiene constante, ya que la distribución de masa no sufre distorsión.

La expresión (7.28) define la dinámica de la rotación en torno a un eje fijo. Es similar a la ley «Fuerza = Masa \times Aceleración» (1.2) para dinámica de traslación de partículas, cumpliendo aquí $\dot{\Omega}$ el papel de aceleración (variación del movimiento), $M_{O,e}$ el papel de fuerza (causante de la variación) e $I_{O,e}$ el papel de masa (inercia a la variación).

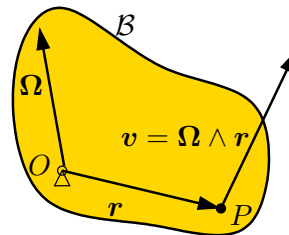
7.3. El tensor de inercia

7.3.1. Concepto y expresiones del tensor de inercia

Para el caso más general de la dinámica del sólido, en lo que sigue nos limitaremos a la ecuación (7.16₂), o bien directamente a la ecuación (7.17) en el caso en que el sólido tenga un punto fijo O —dando por resuelta la solución de la ecuación (7.16₁) que gobierna la traslación—. Como se ha dicho, las dos ecuaciones son formalmente idénticas, expresando ambas la dinámica de la rotación alrededor de un punto que se pueda suponer fijo, sea este punto G u O . Por tanto en lo que sigue desarrollaremos el caso del movimiento alrededor de O fijo (ecuación (7.17)) sabiendo que las ecuaciones son igualmente válidas para el movimiento alrededor de G .

Para poder expresar dicha ecuación en un caso general en que el eje de rotación no sea fijo, es preciso en primer lugar desarrollar las expresiones de las magnitudes cinéticas (momento cinético, energía cinética) de forma intrínseca, sin referirse al eje de rotación, lo que dará lugar al denominado *tensor de inercia*. Como veremos, este tensor constituye la descripción más general de la inercia de un sólido a la variación de su movimiento, generalizando el concepto de momento de inercia que se emplea para la rotación alrededor de un eje.

Figura 7.3: *Movimiento del sólido \mathcal{B} con un punto fijo O , dotado de velocidad de rotación Ω .*



Expresión del Momento Cinético.— El momento cinético de un sólido \mathcal{B} con un punto fijo O , cuya velocidad de rotación instantánea sea Ω , viene

dado por (7.19):

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (7.29)$$

Se comprueba fácilmente que esta expresión es lineal en $\boldsymbol{\Omega}$; por tanto define el vector \mathbf{H}_O como una aplicación lineal del vector $\boldsymbol{\Omega}$, que identificaremos con un tensor de segundo orden⁴ \mathbf{I}_O ,

$$\mathbf{I}_O : \boldsymbol{\Omega} \mapsto \mathbf{H}_O(\boldsymbol{\Omega}) = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV. \quad (7.30)$$

Denominamos a \mathbf{I}_O *tensor de inercia* del sólido \mathcal{B} en el punto O . La aplicación o actuación de \mathbf{I}_O sobre $\boldsymbol{\Omega}$ se expresa mediante la notación siguiente:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (7.31)$$

donde el operador (\cdot) indica la aplicación del tensor sobre un vector, obteniéndose como resultado otro vector⁵.

Componentes del tensor de inercia.— Para clarificar el significado del tensor de inercia, desarrollemos las componentes cartesianas de la expresión vectorial (7.29):⁶

$$\begin{aligned} (H_O)_i &= \int_{\mathcal{B}} [r^2 \Omega_i - (r_j \Omega_j) r_i] \rho dV \\ &= \left[\int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV \right] \Omega_j \\ &= (I_O)_{ij} \Omega_j. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Los coeficientes $(I_O)_{ij}$ corresponden a las componentes del tensor de inercia \mathbf{I}_O y quedan definidos por

$$(I_O)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV. \quad (7.33)$$

⁴Se define un tensor de orden dos como «una función lineal que aplica cada vector a un vector», ver apéndice A

⁵En este texto se empleará el punto (\cdot) para significar esta aplicación de un tensor sobre un vector, que no debe confundirse con el producto escalar entre dos vectores. Otros autores indican la aplicación de un tensor sin ningún símbolo, es decir $\mathbf{I}_O \boldsymbol{\Omega}$

⁶En estas expresiones y en lo sucesivo del capítulo se aplica el convenio del sumatorio implícito, es decir se sobreentiende que se efectúa la suma sobre los índices repetidos en un monomio sobre su rango de variación

La ecuación (7.32) permite interpretar la actuación del tensor de inercia \mathbf{I}_O como el producto tensorial contraído⁷ con $\boldsymbol{\Omega}$.

En *notación tensorial*, a partir de (7.29) y teniendo en cuenta la definición del producto tensorial o diádico (\otimes , véase apéndice A) se obtiene $\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\Omega}$. Por tanto el tensor de inercia se puede expresar de manera intrínseca (independiente de coordenadas) mediante

$$\mathbf{I}_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho \, dV. \quad (7.34)$$

En esta expresión $\mathbf{1}$ es el tensor identidad, de componentes δ_{ij} (deltas de Kronecker) en una base ortonormal. Se comprueba por otro lado a partir de (7.34) que las componentes cartesianas (7.33) para una base ortonormal $(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ se pueden obtener igualmente mediante las expresiones

$$(I_O)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_j). \quad (7.35)$$

Cambio de coordenadas.— Una de las propiedades esenciales de los tensores es el comportamiento de sus coordenadas frente a un cambio de base (apartado A.5 en apéndice A).

En este caso, tiene especial interés considerar el cambio de coordenadas desde el triedro fijo $(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ al triedro del cuerpo $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, cuya matriz de cambio es precisamente la matriz de rotación del sólido $[\mathbf{R}]$. En el triedro del cuerpo, un punto material del sólido tiene coordenadas constantes⁸ a lo largo del movimiento:

$$\mathbf{r} = x^\circ \mathbf{i} + y^\circ \mathbf{j} + z^\circ \mathbf{k}, \quad \text{con } (x^\circ, y^\circ, z^\circ) \text{ constantes.} \quad (7.36)$$

Las componentes del tensor de inercia en el triedro del cuerpo, a partir de (7.33), deben ser igualmente constantes. Empleando la notación indicial para las coordenadas, $(r_1^\circ, r_2^\circ, r_3^\circ) = (x^\circ, y^\circ, z^\circ)$, estas componentes son

$$I_{O,ij}^\circ = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i^\circ r_j^\circ) \rho \, dV \quad (\text{constantes}) \quad (7.37)$$

Consideremos ahora el cambio de base que relaciona el triedro del cuerpo $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ con el triedro fijo $(O, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ ⁹,

$$(\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) = (\mathbf{I} \ \mathbf{J} \ \mathbf{K}) [\mathbf{R}]. \quad (7.38)$$

⁷es decir, realizando el sumatorio en el índice contiguo entre ambos

⁸Este tipo de coordenadas ligadas al movimiento se denominan en ocasiones *coordenadas convectivas*.

⁹Emplearemos la siguiente notación en este curso para las expresiones matriciales: $\{\mathbf{x}\} \equiv \{x_i\}$, $\{\mathbf{r}\} \equiv \{r_i\}$ (entre llaves) para matrices columna $(n \times 1)$, $(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}^T \equiv$

(El triedro fijo puede definirse como aquél que coincide con la posición del triedro del cuerpo en el instante de referencia o inicial, $[\mathbf{R}]_{t=0} = [\mathbf{1}]$.)

Considerando (7.38) y según la convención empleada en el apartado A.5 la matriz de cambio de base es directamente $[\mathbf{A}] = [\mathbf{R}]$, estando el cambio de coordenadas del tensor viene definido por (A.43). La relación entre las componentes del tensor de inercia en ambos triedros es por tanto

$$[\mathbf{I}_O]^\circ = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{R}], \quad (7.39)$$

donde $[\mathbf{I}_O]^\circ$ son las componentes (constantes) del tensor de inercia en el triedro del cuerpo, e $[\mathbf{I}_O]$ las componentes (variables) en el triedro fijo. Teniendo en cuenta por la propiedad de ortogonalidad que $[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1}$, la relación anterior se puede invertir resultando

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{R}] [\mathbf{I}_O]^\circ [\mathbf{R}]^T. \quad (7.40)$$

Esta expresión matricial define las componentes del tensor de inercia en una base fija (inercial) a lo largo del movimiento, en función de la matriz de rotación $[\mathbf{R}]$. Se puede comprender fácilmente que las coordenadas $[\mathbf{I}_O]$ por lo general no serán constantes. Si se desea evitar tener que considerar dicha variación en el cálculo, deberá expresarse el tensor de inercia en un triedro ligado al sólido ($[\mathbf{I}_O]^\circ$).

Expresión de la Energía Cinética.— La expresión de la energía cinética (7.23) se puede desarrollar como:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{H}_O. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Considerando (7.31) puede escribirse en función del tensor de inercia,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (7.42)$$

(x_i) , $(\mathbf{r}) = \{\mathbf{r}\}^T \equiv (r_i)$ para matrices fila ($1 \times n$), y $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$, $[\mathbf{A}] \equiv [A_{ij}]$, $[\mathbf{I}] \equiv [I_{ij}]$ (entre corchetes) para matrices de 2 índices (rectangulares $n \times m$ o cuadradas $n \times n$). Reservaremos las letras «negritas matemáticas» (\mathbf{x} , \mathbf{r} , \mathbf{R} , \mathbf{I}) para vectores o tensores. Procuraremos distinguir de esta manera entre el tensor \mathbf{R} y la matriz de componentes del mismo en un triedro dado, $[\mathbf{R}] \equiv [R_{ij}]$.

Otras maneras de expresar esta ecuación¹⁰ son:

$$T = \frac{1}{2} \Omega_i (I_O)_{ij} \Omega_j \quad (\text{notación indicial}); \quad (7.43)$$

$$= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}) [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (\text{notación matricial}). \quad (7.44)$$

La ecuación (7.42) es una expresión tensorial cuyo resultado es un tensor de orden cero, es decir, un escalar. Por lo tanto, el valor de T es un invariante intrínseco del movimiento, que no depende del sistema de coordenadas elegido. En efecto, realizando el cambio de coordenadas definido por la matriz de cambio $[\mathbf{A}] = [\mathbf{R}]$ según (A.35) y (A.43) y teniendo en cuenta la ortogonalidad de $[\mathbf{R}]$:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}') [\mathbf{I}_O]' \{\boldsymbol{\Omega}'\}' \\ &= \frac{1}{2} ((\boldsymbol{\Omega}) [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T [\mathbf{I}_O] [\mathbf{A}]) ([\mathbf{A}]^T \{\boldsymbol{\Omega}\}) \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}) [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} = T. \end{aligned} \quad (7.45)$$

En definitiva, el tensor de inercia así definido,

1. caracteriza de forma completa la inercia a rotación de un sólido rígido;
2. permite calcular las magnitudes cinéticas (\mathbf{H}_O, T) para establecer las ecuaciones de la dinámica aunque el eje de rotación varíe a lo largo del movimiento.

7.3.2. Momentos y productos de inercia

Sea un eje (O, \mathbf{u}) correspondiente a un versor \mathbf{u} pasando por el punto $O \in \mathcal{B}$. La distancia al eje de un punto cualquiera $P \in \mathcal{B}$ definido por $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ es $d = |\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}|$. Según la definición de momento de inercia (7.21),

$$\begin{aligned} I_u &= \int_{\mathcal{B}} d^2 \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV \\ &= \mathbf{u} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{r}) \rho \, dV. \end{aligned} \quad (7.46)$$

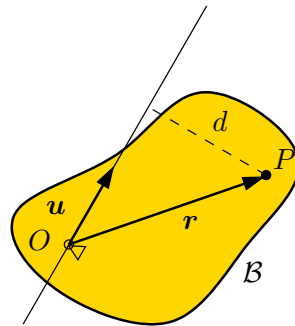
¹⁰ En la expresión (7.42) el primer punto (\cdot) indica producto escalar entre vectores y el segundo la aplicación del tensor sobre un vector. En algunos textos se emplea la notación del producto de un tensor \mathbf{B} por un vector \mathbf{x} por la izquierda como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{x}$, o en índices $x_i B_{ij}$, con lo que la ecuación anterior puede expresarse también sin paréntesis como $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$

La integral que aparece es análoga a la (7.29), que sirvió para definir el tensor de inercia, ocupando aquí \mathbf{u} el lugar de $\boldsymbol{\Omega}$. Por tanto,

$$I_u = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u}) \quad (7.47)$$

Esta expresión define el momento de inercia como una forma cuadrática

Figura 7.4: Momento de inercia del sólido \mathcal{B} respecto de un eje (O, \mathbf{u}) .



función de \mathbf{u} , y permite calcular el momento de inercia para un eje cualquiera por O .

Las componentes cartesianas $(I_O)_{ij}$ del tensor de inercia se pueden obtener mediante las expresiones (7.33) o de forma general (7.35). En concreto, tomando las direcciones de los versores del triedro $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, las componentes de la diagonal principal de la matriz de componentes son los *momentos de inercia* según las direcciones del triedro:

$$I_{xx} = \mathbf{i} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{i}) = \int_{\mathcal{B}} (y^2 + z^2) \rho \, dV, \quad (7.48)$$

$$I_{yy} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{j}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + z^2) \rho \, dV, \quad (7.49)$$

$$I_{zz} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{k}) = \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) \rho \, dV. \quad (7.50)$$

Asimismo, se definen los *productos de inercia*:

$$P_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} xy \rho \, dV; \quad P_{yz} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} yz \rho \, dV; \quad P_{zx} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{B}} zx \rho \, dV. \quad (7.51)$$

La matriz de componentes del tensor de inercia se puede expresar como

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{I}_O] &= \begin{pmatrix} \int_{\mathcal{B}}(y^2 + z^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} xy\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} yx\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(z^2 + x^2)\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV \\ -\int_{\mathcal{B}} zx\rho \, dV & -\int_{\mathcal{B}} yz\rho \, dV & \int_{\mathcal{B}}(x^2 + y^2)\rho \, dV \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.52)
 \end{aligned}$$

De la expresión (7.34) es inmediato comprobar que \mathbf{I}_O es un tensor simétrico, por lo que para definirlo en un caso general bastarán 6 componentes (3 momentos de inercia y 3 productos de inercia).

Además, el tensor \mathbf{I}_O es siempre definido positivo. Esto se deduce de forma inmediata de (7.42) que expresa T como una forma cuadrática de $\boldsymbol{\Omega}$ definida por \mathbf{I}_O , ya que la energía cinética T , por su propia definición, es esencialmente positiva para cualquier movimiento de rotación no nulo ($\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$). Análogamente, los momentos de inercia definidos por la forma cuadrática (7.47) deben ser mayores que cero, anulándose únicamente para sólidos degenerados (rectas o puntos, sin dimensión transversal).

Otras propiedades del tensor de inercia de fácil demostración son las siguientes:

- La *traza* o contracción de un tensor de 2.º orden es un invariante escalar. Por tanto

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\mathbf{I}_O) &= I_{kk} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} \\
 &= 2 \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2 + z^2)\rho \, dV \\
 &= 2 \int_{\mathcal{B}} r^2 \rho \, dV = 2I_O,
 \end{aligned}$$

donde I_O es el denominado *momento de inercia polar*, invariante de \mathcal{B} para un punto O dado.

- Se verifica la propiedad triangular, es decir, un momento de inercia es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia. Se

comprueba inmediatamente,

$$I_{yy} + I_{zz} = \int_{\mathcal{B}} (2x^2 + y^2 + z^2) \rho \, dV = I_{xx} + \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} x^2 \rho \, dV}_{>0},$$

$$I_{yy} - I_{zz} = \int_{\mathcal{B}} (z^2 - y^2) \rho \, dV = I_{xx} - \underbrace{2 \int_{\mathcal{B}} y^2 \rho \, dV}_{>0}.$$

7.3.3. Elipsoide de inercia

Consideremos el haz de ejes que pasan por un punto O , con direcciones arbitrarias definidas por el versor unitario \mathbf{e} . Definimos para cada dirección un punto situado sobre el eje (O, \mathbf{e}) a una distancia $(I_{\mathbf{e}})^{-1/2}$ de O :

$$\mathbf{r} = \pm \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{I_{\mathbf{e}}}}.$$

Si expresamos la forma cuadrática en \mathbf{r} definida por I_O ,

$$\mathbf{r} \cdot (I_O \cdot \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e} \cdot (I_O \cdot \mathbf{e})}{I_{\mathbf{e}}} = 1. \quad (7.53)$$

El lugar geométrico de los puntos definidos por esta ecuación es una cuádrica con centro en O . La expresión (7.53) es una forma cuadrática definida positiva (en todos los casos de sólidos no degenerados), por lo que geométricamente se trata de un elipsoide, llamado *elipsoide de inercia*. Su expresión desarrollada es

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2P_{xy}xy - 2P_{yz}yz - 2P_{zx}zx = 1$$

El elipsoide de inercia ofrece una manera alternativa de estudiar el movimiento del sólido, a través de procedimientos *geométricos*, en lugar de los procedimientos *algebraicos* mediante el tensor de inercia.

7.3.4. Ejes principales de inercia

En un caso general, los vectores velocidad instantánea de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ y el momento cinético $\mathbf{H}_O = I_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$ no serán paralelos. Sin embargo, existen algunas direcciones privilegiadas de $\boldsymbol{\Omega}$ en las que sí se cumple esta condición; estas se llaman *direcciones principales de inercia*. Estas direcciones principales dependen del punto considerado para el tensor de inercia, siendo distintas para el tensor en otro punto distinto $Q \neq O$.

Si $\boldsymbol{\Omega}$ es paralela a una dirección principal de inercia, esto quiere decir que existirá un escalar λ que exprese la proporcionalidad,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \lambda \boldsymbol{\Omega};$$

si tomamos el vector unitario \mathbf{e} correspondiente a esta dirección ($\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$), se cumplirá

$$I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\lambda \mathbf{e}) = \lambda;$$

es decir, el coeficiente de proporcionalidad es precisamente el momento de inercia según la dirección principal, $\lambda = I_e$. Estos coeficientes se denominan *momentos principales de inercia*.

La obtención de las direcciones principales y momentos principales asociados a un tensor \mathbf{I}_O constituye un *problema de autovalores*: Se trata de encontrar una dirección \mathbf{e} tal que, para algún λ , verifique

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (7.54)$$

Introduciendo el tensor unidad $\mathbf{1}$, cuyas componentes cartesianas son las deltas de Kronecker (δ_{ij}), resulta la igualdad

$$(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (7.55)$$

Esta expresión corresponde a un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo, de incógnitas $\mathbf{e} \equiv (e_1 \ e_2 \ e_3)$. Para que exista solución no trivial ($\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$), la matriz de coeficientes de (7.55) ha de ser singular:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = 0, \quad (7.56)$$

expresión que constituye la denominada *ecuación característica* del problema de autovalores (7.54). Se trata de una ecuación cúbica en λ , que posee en general tres raíces, *momentos principales de inercia* ($\lambda_{\text{I}} = A$, $\lambda_{\text{II}} = B$, $\lambda_{\text{III}} = C$). Al ser \mathbf{I}_O simétrico, estas tres raíces deben ser reales; como además es definido positivo, las tres serán además positivas.

Cada momento principal de inercia está asociado a una dirección principal de inercia, solución de (7.55) con el valor de λ del momento principal correspondiente: (\mathbf{e}_{I} , \mathbf{e}_{II} , \mathbf{e}_{III}). Admitamos en primer lugar que la ecuación característica tiene tres raíces distintas ($A \neq B \neq C$), las tres direcciones principales se obtienen respectivamente de

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{\text{I}} = A \mathbf{e}_{\text{I}} \quad (7.57)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{\text{II}} = B \mathbf{e}_{\text{II}} \quad (7.58)$$

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{\text{III}} = C \mathbf{e}_{\text{III}} \quad (7.59)$$

Ortogonalidad de los ejes principales de inercia

Una propiedad esencial de las direcciones principales es que, si corresponden a autovalores distintos, han de ser mutuamente ortogonales. En efecto, multiplicando escalarmente (7.57) por \mathbf{e}_{II} y (7.58) por \mathbf{e}_{I} ,

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{\text{II}} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{\text{I}}) &= A\mathbf{e}_{\text{II}} \cdot \mathbf{e}_{\text{I}} \\ \mathbf{e}_{\text{I}} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_{\text{II}}) &= B\mathbf{e}_{\text{I}} \cdot \mathbf{e}_{\text{II}}\end{aligned}$$

restando estas dos expresiones y haciendo uso de la simetría del tensor de inercia, se obtiene

$$0 = (A - B)\mathbf{e}_{\text{I}} \cdot \mathbf{e}_{\text{II}}.$$

Esta expresión indica la ortogonalidad entre ambas direcciones, ya que por hipótesis antes realizada $(A - B) \neq 0$. Por lo tanto, el triedro de referencia $(O, \mathbf{e}_{\text{I}}, \mathbf{e}_{\text{II}}, \mathbf{e}_{\text{III}})$ formado por las tres direcciones principales en O constituye una base ortonormal ligada al sólido, denominada *triedro principal de inercia*. Las componentes del tensor de inercia en esta base son

$$(I_O)_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}_j) = \lambda_i \delta_{ij} \quad (i \text{ no sumado}),$$

lo que equivale a una matriz de componentes diagonal:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Los ejes principales de inercia corresponden a los ejes geométricos del elipsoide de inercia, cuya expresión en este triedro sería

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

ecuación que corresponde a un elipsoide de semiejes $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{B}, 1/\sqrt{C})$.

Tensores de inercia cilíndricos o esféricos

En el caso en que existiera una raíz doble en la ecuación característica (7.56), habría dos momentos principales iguales. Los ejes principales de inercia estarán constituidos por el correspondiente a la raíz única y otros dos ejes cualesquiera en el plano normal al primero y que sean ortogonales entre sí, adoptando entonces la matriz de componentes del tensor de inercia la forma

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

En este caso es inmediato comprobar que cualquier dirección del plano $(O, \mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II})$ ortogonal al tercer vector (es decir, un vector $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{e}_I + \beta\mathbf{e}_{II}$ para α y β arbitrarias) es también dirección principal de inercia. Estamos ante un tensor de inercia *cilíndrico*. Como ejemplo, este es el caso de un sólido de revolución o un prisma cuya sección sea un polígono regular.

Por último, en el caso en que exista una única raíz triple, análogamente al caso anterior, cualquier dirección del espacio es principal. Podremos escoger como ejes principales tres direcciones ortogonales cualesquiera. Diremos que el tensor de inercia es *esférico*, siendo su expresión en cualquier sistema cartesiano de coordenadas la misma:

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Este es, por ejemplo, el caso de una esfera o de un cubo.

Máximos y mínimos de los momentos de inercia

Veamos ahora que los momentos de inercia correspondientes a las direcciones principales son los máximos y mínimos de los momentos de inercia para cualquier dirección. Basta plantear el problema de máximos/mínimos condicionados en el que se buscan los extremos de la función

$$I_e(\mathbf{e}) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}), \quad (7.60)$$

sujetos a la ligadura

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1, \quad (7.61)$$

puesto que el versor \mathbf{e} debe tener módulo unidad. El problema se soluciona mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Tomando una variación infinitesimal de la primera expresión e igualando a cero, la condición de extremo (7.60) queda expresada como

$$2\mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \delta\mathbf{e}) = 0.$$

(donde se ha empleado la simetría de \mathbf{I}_O .) Multiplicando la ecuación de ligadura (7.61) por un multiplicador arbitrario λ , y tomando igualmente su variación,

$$2\lambda\mathbf{e} \cdot \delta\mathbf{e} = 0.$$

Restando ahora ambas expresiones,

$$(\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} - \lambda\mathbf{e}) \cdot \delta\mathbf{e} = 0,$$

lo que, al ser δe arbitrario, obliga a

$$\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (7.62)$$

Es decir, \mathbf{e} debe ser una dirección principal, como queríamos demostrar. Por lo tanto, de las tres direcciones principales, una corresponderá al máximo momento de inercia, otra al mínimo, y la tercera a un valor intermedio.

7.3.5. Simetrías de masas

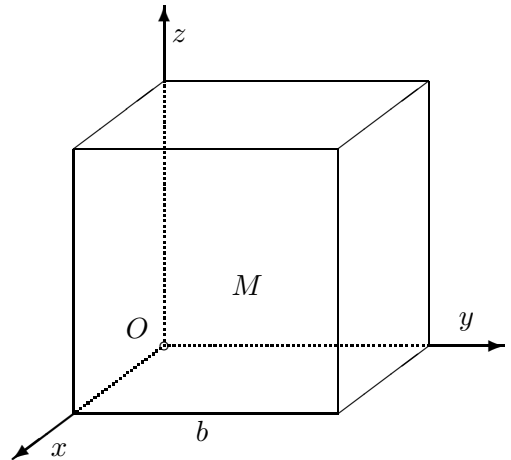
La existencia de simetrías en la distribución de masas simplifica de manera considerable el cálculo del tensor de inercia. En la práctica es conveniente emplear estas simplificaciones siempre que sea posible. Se discuten a continuación algunos de los casos más comunes.

- Plano de Simetría.* Por ejemplo, si (Oxy) es un plano de simetría del sólido, cualquier partícula de coordenadas (x, y, z) posee una simétrica $(x, y, -z)$. Así, $P_{xz} = \int_{\mathcal{B}} xz\rho dV = 0$, $P_{yz} = \int_{\mathcal{B}} yz\rho dV = 0$. En la expresión de la matriz de inercia (7.52), la tercera fila y la tercera columna se anulan, por lo que el eje Oz (perpendicular al plano de simetría) es un eje principal de inercia.
- Eje de Simetría.* Sea este, ejemplo el eje Oz . Para toda partícula en (x, y, z) existe otra en $(-x, -y, z)$. Por tanto $P_{xz} = P_{yz} = 0$, y el eje de simetría Oz es también eje principal de inercia.
- Eje de Revolución.* Sea este por ejemplo el eje Oz . El eje de revolución es también eje de simetría, por lo que Oz será eje principal. Por otra parte, existe simetría respecto de cualquier plano que contenga al eje de revolución, por lo que todo eje $\in Oxy$ es principal de inercia. Estaremos por tanto ante un tensor de inercia cilíndrico,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 7.1: Sea un cubo homogéneo, de masa M y arista b . Se desea calcular las componentes del tensor de inercia referido a un vértice del cubo con ejes paralelos a las aristas, así como los ejes principales de inercia.

Figura 7.5: Obtención del tensor de inercia de un cubo respecto del vértice O , con ejes (x, y, z) paralelos a las aristas



Calculamos directamente las integrales que definen las componentes del tensor de inercia (7.52) en ejes cartesianos ortonormales (7.52):

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy \int_0^b dx \\
 &= \rho b \int_0^b dz \int_0^b (y^2 + z^2) \, dy = \rho b \int_0^b \left(\frac{b^3}{3} + bz^2 \right) dz \\
 &= \rho b \left(\frac{b^4}{3} + \frac{b^4}{3} \right) = \frac{2}{3} Mb^2,
 \end{aligned}$$

ya que $M = b^3 \rho$. Análogamente

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} Mb^2.$$

Los productos de inercia valen

$$\begin{aligned}
 P_{xy} &= \iiint_V xy \rho \, dx \, dy \, dz = \rho \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy \int_0^b dz \\
 &= \rho b \int_0^b dx \int_0^b xy \, dy = \rho \frac{b^3}{2} \int_0^b x \, dx \\
 &= \rho \frac{b^3}{2} \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4} Mb^2
 \end{aligned}$$

y de igual manera

$$P_{yz} = P_{zx} = \frac{1}{4} Mb^2.$$

Por lo tanto, las componentes del tensor de inercia son

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}. \quad (7.63)$$

Calculemos ahora los ejes principales de inercia. La ecuación característica es:

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda & -\frac{1}{4}\beta \\ -\frac{1}{4}\beta & -\frac{1}{4}\beta & \frac{2}{3}\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

donde se denomina $Mb^2 = \beta$ para abreviar. Desarrollando el determinante,

$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = \left(\frac{11}{12}\beta - \lambda\right) \left[\left(\frac{5}{12}\beta - \lambda\right) \left(\frac{2}{3}\beta - \lambda\right) - \frac{1}{8}\beta^2\right] = 0,$$

cuyas soluciones son $\lambda = (1/6)\beta$ y $\lambda = (11/12)\beta$ (doble).

Por lo tanto el tensor de inercia es cilíndrico; expresado en los ejes principales sería

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix}$$

Para obtener las direcciones principales, sustituimos en (7.62) cada autovalor λ solución de la ecuación característica, y resolviendo para \mathbf{e} obtendremos la dirección principal asociada. Conviene recordar que al ser la matriz de coeficientes singular, estas direcciones principales quedan indeterminadas en función de al menos un parámetro, lo que nos permite elegir las soluciones normalizadas, correspondientes a versores de módulo unidad.

Sustituyendo el primer autovalor ($\lambda = \beta/6$) en (7.62) y simplificando resulta:

$$\begin{aligned} 2e_1 - e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 + 2e_2 - e_3 &= 0, \\ -e_1 - e_2 + 2e_3 &= 0. \end{aligned}$$

La solución —función de un parámetro indeterminado μ ya que las tres ecuaciones no son independientes— es $\mu(1, 1, 1)$, que corresponde a la diagonal del cubo.

Las otras dos direcciones principales hay que buscarlas en el plano normal a ésta. Como el otro autovalor es una solución doble, serán cualesquiera dos direcciones de este plano que sean normales entre sí (el tensor de inercia es cilíndrico).

7.3.6. Campo tensorial de inercia

Tal y como se ha definido en el apartado 7.3.1, el tensor de inercia es un *tensor de punto*, ligado al punto material O que se ha tomado como origen de coordenadas. Por lo tanto, al variar dicho punto, se obtendrá un tensor distinto, con lo que se define un *campo tensorial*: a cada punto $O \in \mathcal{B}$ le corresponde un tensor \mathbf{I}_O . Si se toma como referencia el centro de masas G , obtendremos el llamado *tensor central de inercia*, \mathbf{I}_G :

$$\mathbf{I}_G = \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho dV \quad (7.64)$$

Donde $\mathbf{r}_{GP} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{GP}$, vector posición desde G a un punto genérico $P \in \mathcal{B}$.

Calculemos la expresión del tensor en un punto distinto \mathbf{I}_O en función del tensor central \mathbf{I}_G ; empleando la descomposición¹¹ $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_{GP}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= \int_{\mathcal{B}} (r_P^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_P \otimes \mathbf{r}_P) \rho dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} (r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \rho dV + \int_{\mathcal{B}} (r_{GP}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_{GP}) \rho dV \\ &\quad + 2 \cdot \mathbf{1} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{r}_{GP}) \rho dV - \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_{GP} + \mathbf{r}_{GP} \otimes \mathbf{r}_G) \rho dV \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales se anulan debido a que se reducen a factores constantes por integrales del tipo $\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_{GP} \rho dV = \mathbf{0}$. Por lo tanto la expresión del campo tensorial de inercia resulta

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G). \quad (7.65)$$

Desarrollando esta expresión en componentes:

$$(I_O)_{ij} = (I_G)_{ij} + M[r_G^2 \delta_{ij} - (r_G)_i (r_G)_j],$$

o matricialmente:

$$[\mathbf{I}_O] = [\mathbf{I}_G] + M(r_G^2 [\mathbf{1}] - \{\mathbf{r}_G\} \{\mathbf{r}_G\}^T).$$

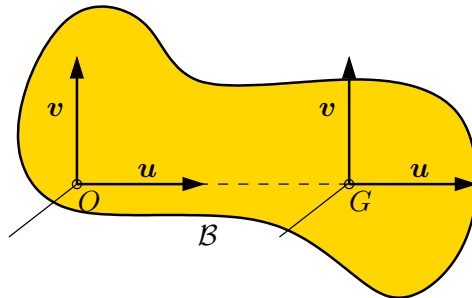
¹¹empleamos la notación $\mathbf{r}_P \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}$ para denotar al vector posición desde el origen O a un punto P explicitado en el subíndice

Propiedades del campo tensorial de inercia

a. *Ejes principales de inercia*

Sea un punto O sobre uno de los ejes principales de inercia en G . Entonces, tanto la dirección principal $\mathbf{u} \parallel \mathbf{r}_G$ como las otras dos direcciones principales perpendiculares a \mathbf{u} son también principales en O . Para comprobar esto, distinguimos los dos casos, según que la direc-

Figura 7.6: *ejes principales de inercia en un punto O sito sobre uno de los ejes principales por G*



ción sea la del vector unitario \mathbf{u} o perpendicular a éste. En el primero, $\mathbf{r}_G = \overline{OG} \mathbf{u} = r_G \mathbf{u}$; aplicando (7.65):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{u} + M[r_G^2 \mathbf{u} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (r_G^2 \mathbf{u})] \\ &= \lambda \mathbf{u} + M[r_G^2 \mathbf{u} - \underbrace{r_G^2 \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}_{=1}] \\ &= \lambda \mathbf{u} \end{aligned}$$

En el caso de una dirección \mathbf{v} normal a \mathbf{r}_G , tal que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$, aplicando de nuevo (7.65) para \mathbf{I}_O ,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{v} + M[r_G^2 \mathbf{v} - (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \cdot (r_G^2 \mathbf{v})] \\ &= \lambda \mathbf{v} + M[r_G^2 \mathbf{v} - r_G^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}] \\ &= (\lambda + M r_G^2) \mathbf{v} \end{aligned}$$

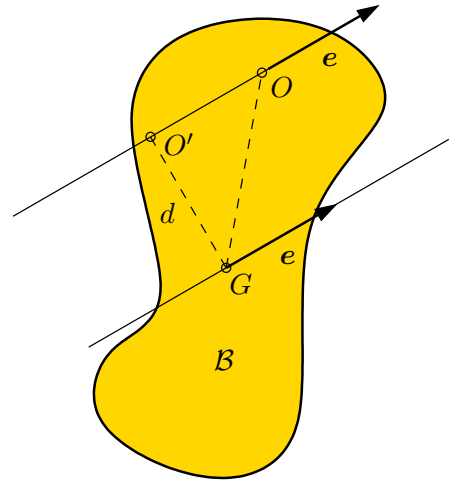
En ambos casos la dirección principal de \mathbf{I}_G lo vuelve a ser de \mathbf{I}_O , con el mismo momento principal de inercia en el primer caso (\mathbf{u} paralela a \mathbf{r}_G), y con el momento aumentado ($I_{O,v} = I_{G,v} + M r_G^2$) en el segundo caso (\mathbf{v} perpendicular a \mathbf{r}_G).

b. *Teorema de Steiner*

Sea un eje por el centro de masas (G, \mathbf{e}) en el cual conocemos el momento de inercia $I_{G,e}$. El momento de inercia respecto de un eje

(O, \mathbf{e}) paralelo por otro punto O y que diste d del primero (figura 7.7) será

Figura 7.7: *Teorema de Steiner: momento de inercia para un eje (O, \mathbf{e}) paralelo a (G, \mathbf{e})*



$$\begin{aligned}
 I_{O,e} &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) \\
 &= \mathbf{e} \cdot ([\mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)] \cdot \mathbf{e}) \\
 &= \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_G \cdot \mathbf{e}) + M[r_G^2(\mathbf{e} \cdot (\mathbf{1} \cdot \mathbf{e})) - \mathbf{e} \cdot ((\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \cdot \mathbf{e})] \\
 &= I_{G,e} + M \underbrace{\left[r_G^2 - \overbrace{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_G)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_G)}^{\overline{OO'}^2} \right]}_{d^2}
 \end{aligned}$$

Se obtiene por tanto la expresión del *Teorema de Steiner*:

$$I_{O,e} = I_{G,e} + M d^2.$$

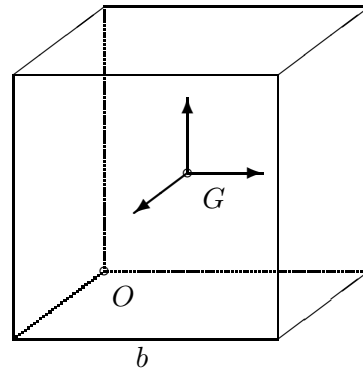
Es inmediato ver que, para una dirección \mathbf{e} dada, el momento de inercia mínimo es el correspondiente al eje (G, \mathbf{e}) que pasa por G .

EJEMPLO 7.2: Continuando con el cubo del ejemplo 7.1 anterior se pretende ahora hallar el tensor de inercia en el centro de masas, respecto a unos ejes paralelos a las aristas del cubo, a partir del tensor de inercia obtenido antes en un vértice (7.63).

Aplicamos la expresión (7.65) del campo tensorial de inercia:

$$\mathbf{I}_G = \mathbf{I}_O - M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G).$$

Figura 7.8: Obtención del tensor central de inercia de un cubo respecto de su centro G



El vector \mathbf{r}_G vale:

$$(\mathbf{r}_G) = (b/2, b/2, b/2) \Rightarrow \begin{cases} r_G^2 = \frac{3b^2}{4}; \\ r_{G,i} r_{G,j} = \frac{b^2}{4} \quad (\forall i, j). \end{cases}$$

luego:

$$[M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)]_{ij} = M(r_G^2 \delta_{ij} - r_{G,i} r_{G,j}),$$

y su matriz de componentes es

$$M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} = M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, a partir de (7.63),

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}_G] &= Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} - M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se comprueba pues que el triedro formado por las direcciones de las aristas es un triedro principal en G . Lo mismo se podría haber deducido por simetrías, ya que la dirección de cada arista en G es un eje de simetría.

De hecho, por ser el tensor esférico (los tres momentos principales son iguales), la matriz de componentes es diagonal y cualquier eje es principal en G . El resultado habría sido el mismo para cualquier triedro de referencia

cartesiano por el centro. En definitiva, el comportamiento de un cubo respecto al giro alrededor de su centro de masas es por lo tanto idéntico al de una esfera.

7.4. Ecuaciones de la dinámica

En lo que antecede se han desarrollado los conceptos necesarios de cinemática de la rotación (rotaciones finitas y su parametrización mediante los ángulos de Euler) y de cinética y geometría de masas (tensor de inercia, momentos de inercia, expresiones generales del momento cinético y energía cinética). Pasaremos ahora a plantear las ecuaciones de la dinámica del sólido con un punto fijo, debidas a Euler. Partimos para ello de la ecuación del momento cinético, que tomará la forma (7.17) si se aplica en un punto propiamente fijo o (7.16₂) si se aplica en G para un movimiento general.

7.4.1. Ecuaciones de Euler

Según hemos visto, el momento cinético \mathbf{H}_O viene expresado por (7.31), en función del tensor de inercia \mathbf{I}_O , que define la geometría de masas del sólido respecto a O . El tensor de inercia será *constante* para un observador ligado al movimiento del cuerpo; en cambio, respecto del sistema de referencia fijo, sería necesario considerar la variación de sus componentes, como se comprueba en (7.40). Así, la derivada (absoluta) de \mathbf{H}_O conviene realizarla a través del observador ligado al sólido, añadiendo después el término complementario correspondiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la constancia de \mathbf{I}_O para la derivada relativa al sólido, resulta la denominada *ecuación de Euler* de la dinámica, en su expresión vectorial:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (7.66)$$

Hacemos notar que esta ecuación es una expresión vectorial *intrínseca*, es decir, independiente del sistema en el que se expresen sus coordenadas (que podrían desarrollarse en el triedro fijo, el intermedio o el triedro del sólido).

Observamos además que en esta expresión la derivada de $\boldsymbol{\Omega}$ es indiferente realizarla de forma absoluta o relativa al movimiento del cuerpo:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} &= \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega}^0 \\ &= \dot{p}\mathbf{i} + \dot{q}\mathbf{j} + \dot{r}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Desarrollemos ahora las componentes de la expresión vectorial (7.66) en el triedro del cuerpo. Suponiendo que hemos escogido este según las direcciones principales de inercia¹²,

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k};$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} \\ &= -(B-C)qr\mathbf{i} - (C-A)pr\mathbf{j} - (A-B)pq\mathbf{k};\end{aligned}$$

por lo que la expresión en componentes de las *ecuaciones de Euler* resulta:

$$\begin{cases} M_x = A\dot{p} - (B-C)qr, \\ M_y = B\dot{q} - (C-A)rp, \\ M_z = C\dot{r} - (A-B)pq. \end{cases} \quad (7.67)$$

Para desarrollar el planteamiento completo de las ecuaciones dinámicas en función de las coordenadas sería necesario sustituir en la expresión anterior los valores de (p, q, r) y de sus derivadas en función de los ángulos de Euler (6.54), que repetimos a continuación

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \\ q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \end{cases} \quad (7.68)$$

Eliminando (p, q, r) entre estas ecuaciones se podría obtener un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales de 2.º orden en función de los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) . Sin embargo, estas ecuaciones resultan excesivamente farragosas y

¹²obviamente las direcciones principales de inercia son ejes materiales fijos ligados al sólido, y al ser ortogonales entre sí forman un triedro.

se suele preferir plantear los dos conjuntos de 3 ecuaciones de primer orden de manera simultánea, lo que es equivalente.

El conjunto de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden (7.67) y (7.68) queda planteado en función de las 6 variables, (ψ, θ, φ) y (p, q, r) . Su resolución puede llevarse a cabo por métodos analíticos (en el capítulo 8 se discute la solución para algunas aplicaciones concretas), o bien por métodos numéricos (por ejemplo mediante el método de integración paso a paso en el tiempo de Runge-Kutta).

7.4.2. Ecuaciones de Euler empleando el triedro intermedio

Cuando se trata de un sólido de revolución puede ser conveniente expresar las ecuaciones dinámicas realizando la derivada relativa respecto al denominado *triedro intermedio* (apartado 6.3.4). La velocidad de rotación de este sistema respecto al fijo¹³ es $(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k})$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\text{rel}} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Al tomar la derivada relativa en la ecuación anterior respecto a un observador ligado al triedro intermedio, se ha tenido en cuenta que, al ser el sólido de revolución su tensor de inercia permanece inalterado por la rotación propia, por tanto \mathbf{I}_O no se deriva.

Desarrollando la ecuación en componentes, suponiendo que se ha elegido el triedro principal de inercia con momentos principales (A, A, C) :

$$\mathbf{I}_O \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right)_{\text{rel}} = A\dot{p}'\mathbf{u} + A\dot{q}'\mathbf{v} + C\dot{r}'\mathbf{k}$$

$$(\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{k} \\ p' & q' & r' - \dot{\varphi} \\ Ap' & Aq' & Cr' \end{vmatrix}$$

resulta:

$$\begin{cases} M_u = A\dot{p}' - (A - C)q'r' + Aq'\dot{\varphi} \\ M_v = A\dot{q}' - (C - A)r'p' - Ap'\dot{\varphi} \\ M_z = C\dot{r}' \end{cases} \quad (7.69)$$

Observamos además que se verifica $r' = r$, por lo que no hace falta la distinción entre ambas variables. Estas ecuaciones se complementan con las

¹³ No debe confundirse esta *velocidad de rotación relativa* con las componentes de la *velocidad de rotación absoluta* en el triedro intermedio, deducidas en el apartado 6.3.5.

que expresan las componentes (p', q', r) obtenidas anteriormente (6.55) y que repetimos aquí:

$$\begin{cases} p' = \dot{\theta}, \\ q' = \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \\ r' = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad [= r]. \end{cases} \quad (7.70)$$

Las 6 ecuaciones (7.69) y (7.70) definen en este caso el problema en función de las 6 variables (ψ, θ, φ) y (p', q', r) . En este caso es más sencillo la eliminación de las componentes de la velocidad de rotación, dando lugar a las 3 ecuaciones de la dinámica directamente en función de los 3 ángulos de Euler (ψ, θ, φ) :

$$\begin{cases} M_u = A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta, \\ M_v = A\ddot{\psi} \operatorname{sen} \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cr\dot{\theta}, \\ M_z = C\ddot{\varphi}. \end{cases} \quad (7.71)$$

De la tercera ecuación en (7.69₃) se observa que, para sólidos de revolución, si el momento M_z según el eje de revolución se anula, la velocidad de rotación según dicho eje se conserva: $M_z = 0 \Rightarrow r = r' = \text{cte}$. Conviene notar que esta propiedad sólo se verifica para un tensor cilíndrico en que los momentos de inercia según dos ejes perpendiculares al eje z sean iguales, como es el caso en un sólido de revolución.

7.4.3. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Euler la dinámica (7.67) ó (7.69) se han obtenido antes por los procedimientos vectoriales (Newton-Euler). A partir de la dinámica analítica se podrían haber obtenido también tres ecuaciones dinámicas, que cabría esperar que fueran equivalentes a las ecuaciones de Euler. En realidad, tan sólo una de las ecuaciones así obtenidas coincide directamente con alguna de las ecuaciones de Euler: se trata de la ecuación de Lagrange en φ , que viene a ser la misma que la ecuación en (7.67₃), es decir la ecuación de Euler correspondiente al movimiento de giro alrededor del eje Oz del triedro móvil. Las otras dos ecuaciones, aunque no son directamente iguales, como veremos forman un conjunto equivalente a las ecuaciones de Euler.

Obtenemos la ecuación de Lagrange en dirección φ desarrollando los términos de (2.12). Para ello expresamos las derivadas mediante la regla de

la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} \right] = C\dot{r} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} \\ &= Ap \underbrace{(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi)}_q + Bq \underbrace{(-\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi)}_{-p} \\ &= (A - B)pq. \end{aligned}$$

siendo por tanto la ecuación resultante

$$Q_\varphi = C\dot{r} - (A - B)pq.$$

Se observa la identidad de ésta con (7.67₃), teniendo la fuerza generalizada Q_φ la interpretación física de la componente M_z del momento. Por permutación cíclica, cambiando los papeles de los ejes (x, y, z) , sería posible deducir las otras dos ecuaciones de Euler expresadas en (7.67).

También se pueden obtener directamente las ecuaciones de Lagrange relativas a las variables ψ y θ . No detallaremos aquí el desarrollo y daremos únicamente el resultado, quedando propuesta la deducción como ejercicio al lector:

$$\begin{aligned} Q_\psi &= A\dot{p} \sin \theta \sin \varphi + Ap(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) + B\dot{q} \sin \theta \cos \varphi \\ &\quad + Bq(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) + C\dot{r} \cos \theta - Cr\dot{\theta} \sin \theta \\ Q_\theta &= A\dot{p} \cos \varphi - Ap(\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi) - B\dot{q} \sin \varphi \\ &\quad - Bq(\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi) + Cr\dot{\psi} \sin \theta \end{aligned}$$

Conviene recalcar que, aunque las ecuaciones de Lagrange en función de las coordenadas generalizadas (ψ, θ, φ) no son las mismas ecuaciones que las de Euler (7.67), son combinación lineal de ellas y en conjunto constituyen un sistema equivalente. Es fácil, obteniendo los coeficientes de esta combinación lineal, expresar los momentos generalizados $(Q_\psi, Q_\theta, Q_\varphi)$ a partir de los momentos «físicos» (M_x, M_y, M_z) :

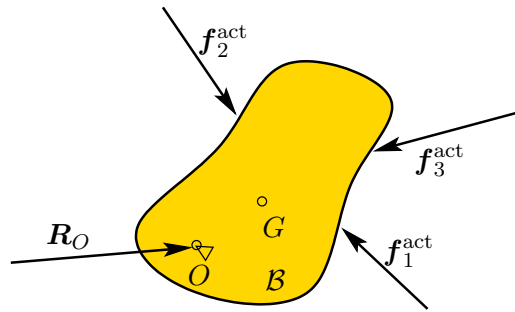
$$\begin{aligned} Q_\psi &= M_x \sin \theta \sin \varphi + M_y \sin \theta \cos \varphi + M_z \cos \theta \\ Q_\theta &= M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi \\ Q_\varphi &= M_z. \end{aligned}$$

7.4.4. Cálculo de reacciones en los enlaces

Sólido con un punto fijo

Como es lógico, en la ligadura del punto fijo se produce una fuerza de reacción. Esta será un vector \mathbf{R}_O de dirección en principio arbitraria, aplicada en O .

Figura 7.9: Fuerza de reacción \mathbf{R}_O de un sólido con un punto O fijo



La reacción se puede calcular fácilmente a través de la expresión del balance de la cantidad de movimiento (7.16₁), descomponiendo las fuerzas en activas y reactivas:

$$\mathbf{F}^{\text{act}} + \mathbf{R}_O = M\mathbf{a}_G$$

siendo $\mathbf{F}^{\text{act}} = \sum_i \mathbf{f}_i^{\text{act}}$ la resultante de las fuerzas externas activas aplicadas al sólido.

Por cinemática sabemos que

$$\mathbf{a}_G = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{r}_{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OG})$$

de donde

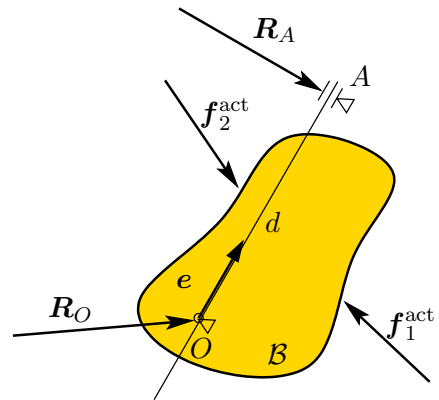
$$\mathbf{R}_O = M[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{r}_{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OG})] - \mathbf{F}^{\text{act}}. \quad (7.72)$$

Los valores de $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ se obtendrían de resolver las ecuaciones de Euler (7.66). En el caso en que el punto fijo sea precisamente G , la ecuación anterior (7.72) se reduce a la expresión trivial $\mathbf{R}_G = -\mathbf{F}^{\text{act}}$.

Sólido con un eje fijo (2 puntos fijos)

Suponemos ahora que el eje fijo se materializa mediante un punto fijo (O) y otro punto A cuyo movimiento está restringido en dirección normal a OA (en la propia dirección de OA no es necesario restringir ya que el sólido es rígido). El momento de las fuerzas en O es el de las fuerzas exteriores

Figura 7.10: Fuerzas de reacción de un sólido con un eje fijo, materializado mediante un punto O fijo y otro punto A que sólo permite movimiento en la dirección del eje.



activas, más el de la reacción en A ; planteando así las ecuaciones de Euler (7.66)

$$\mathbf{M}_O^{\text{act}} + \mathbf{r}_{OA} \wedge \mathbf{R}_A = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (7.73)$$

donde $\mathbf{r}_{OA} = d\mathbf{e}$, y al ser \mathbf{e} un vector fijo,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega}\mathbf{e}.$$

La expresión (7.73) es una ecuación vectorial que permite calcular \mathbf{R}_A . Recordemos que en el apartado 6.1.2 ya se estudiaron este tipo de ecuaciones, en el contexto de la cinemática. Para que exista solución, la condición de compatibilidad exige que \mathbf{e} sea normal al término independiente:

$$\mathbf{e} \cdot [\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{M}_O^{\text{act}}] = I_{O,e} \dot{\Omega} - M_e = 0,$$

condición que como vemos efectivamente se cumple (recuérdese (7.28)). Despejando pues \mathbf{R}_A ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A &= \frac{[\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{M}_O^{\text{act}}] \wedge d\mathbf{e}}{d^2} \\ &= \frac{[\dot{\Omega}\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} + \Omega^2 \mathbf{e} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{M}_O^{\text{act}}] \wedge \mathbf{e}}{d} \end{aligned}$$

En el caso particular en que se cumpla $\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e} = I_{O,e} \mathbf{e}$ (es decir si \mathbf{e} es un eje principal), entonces la expresión anterior resulta

$$\mathbf{R}_A = \frac{\mathbf{e} \wedge \mathbf{M}_O^{\text{act}}}{d}.$$

Es inmediato comprobar que este valor es el mismo que se produciría en situación estática, por lo que en este caso particular no se producen efectos dinámicos sobre la reacción.

Una vez calculada \mathbf{R}_A , la reacción en el otro punto, \mathbf{R}_O , se calcula de igual manera que en (7.72):

$$\mathbf{R}_O = M\mathbf{a}_G - \mathbf{F}^{\text{act}} - \mathbf{R}_A.$$

