

Capítulo 8

Aplicaciones de la dinámica del sólido

Índice

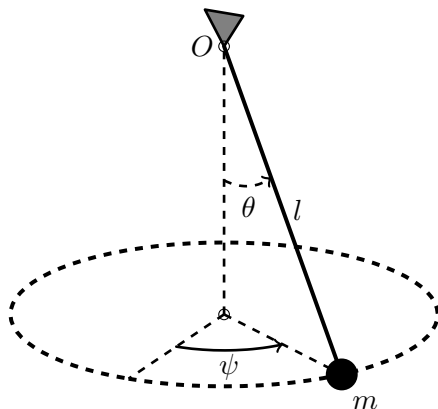
8.1. El péndulo esférico	8.1
8.2. Movimiento por inercia	8.5
8.2.1. Propiedades del movimiento; construcción de Poin- sot	8.5
8.2.2. Ejes permanentes de rotación	8.10
8.2.3. Ecuaciones del movimiento	8.13
8.3. La peonza simétrica	8.16
8.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza	8.16
8.3.2. Estabilidad de la peonza dormida	8.21
8.4. Efecto giroscópico	8.23
8.5. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales	8.28

8.1. El péndulo esférico

En este capítulo se describen algunos ejemplos significativos de aplicación de las ecuaciones de la dinámica de sólidos rígidos en movimiento tridimensional. En primer lugar se trata el caso del denominado *péndulo esférico* que al no tener rotación propia se caracteriza únicamente por dos grados de libertad y resulta más sencillo.

Sea una masa puntual m sujeta a un extremo de una varilla rígida y sin masa de longitud l , cuyo otro extremo (O) está fijo. El sistema rígido así

Figura 8.1: Un péndulo esférico consiste en una masa puntual m unida por una varilla rígida a un punto fijo O , pudiéndose mover en cualquier dirección del espacio.



definido no tiene dimensión transversal a la varilla/partícula, que consideramos alineada con el eje Oz (versor \mathbf{k}) del *triedro del cuerpo*. No existe inercia a la *rotación propia* alrededor de dicho eje, por lo que no tiene sentido definir este grado de libertad. El movimiento queda caracterizado únicamente por dos ángulos: ψ (*precesión*) y θ (*nutación*) (figura 8.1). Es inmediato ver que el triedro del cuerpo, cualesquiera que sean las orientaciones de los otros dos ejes Ox y Oy normales a Oz , es principal. Las componentes del tensor de inercia en O son

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, consideraremos el eje Ox horizontal y normal al plano formado por la varilla y la vertical por O , es decir, tangente a la circunferencia dibujada en la figura 8.1, y el eje Oy normal a la varilla y contenido en dicho plano vertical. Las componentes de la velocidad de rotación según estos ejes son respectivamente $p = \dot{\theta}$ y $q = \dot{\psi} \sin \theta$ (según el eje Oz como ya se ha comentado no se considera rotación, $r = 0$). Puede comprobarse que estos valores resultan de particularizar las componentes de (6.54) para $\varphi = 0$, o bien de tomar directamente las componentes en el triedro intermedio (6.55). La Lagrangiana vale por tanto

$$L = \frac{1}{2}ml^2(p^2 + q^2) + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + mgl \cos \theta.$$

Podemos expresar dos integrales primeras. En primer lugar ψ es una coordenada cíclica puesto que no aparece en la Lagrangiana ($\partial L / \partial \psi = 0$):

$$H = ml^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta. \quad (8.1)$$

Por otra parte, la energía total se conserva, al ser las únicas fuerzas las del campo gravitatorio conservativo:

$$E = \frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) - mgl \cos \theta. \quad (8.2)$$

De (8.1) despejamos la velocidad de precesión:

$$\dot{\psi} = \frac{H}{ml^2 \sin^2 \theta},$$

de donde se desprende que $\dot{\psi}$ nunca cambia de signo, ya que en el lado derecho de la igualdad el único término que no es constante ($\sin^2 \theta$) es siempre positivo. Eliminando $\dot{\psi}$ en la ecuación (8.2), se obtiene:

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{H^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta,$$

y despejando $\dot{\theta}^2$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} - \frac{H^2}{m^2 l^4 \sin^2 \theta} + \frac{2g}{l} \cos \theta.$$

Se puede ahora realizar el cambio

$$u = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2},$$

obteniéndose al eliminar θ una ecuación cúbica en u :

$$f(u) = \dot{u}^2 = (1 - u^2) \left(\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l} u \right) - \frac{H^2}{m^2 l^4}. \quad (8.3)$$

Para que el movimiento físico sea real debe ser $f(u) = \dot{u}^2 \geq 0$, con lo cual se puede delimitar el rango de valores de u en el que se desarrolla dicho movimiento. La ecuación (8.3) es un polinomio cúbico que posee tres soluciones reales para $f(u) = 0$, correspondientes a puntos de máximo o mínimo de u , ya que en ellas vale $\dot{u} = 0$. De ellas, dos y sólo dos están comprendidas entre $u = 1$ y $u = -1$, rango de validez del cambio de variable anterior. En efecto, para $u = \pm 1$ se comprueba fácilmente que $f(u) < 0$ (el primer sumando de la ecuación (8.3) se anula y sólo queda el segundo que es negativo); luego para que efectivamente exista un movimiento real con $f(u) > 0$ dentro del intervalo considerado, debe haber dos puntos (u_1, u_2) en que la curva $f(u)$ cruce el eje $f(u) = 0$ (figura 8.2). Por ello la nutación θ

Figura 8.2: Gráfico de la ecuación cúbica $f(u)$ obtenida a partir de la integral primera de la energía, en función de $u = \cos \theta$. Las raíces $f(u) = 0$ corresponden a los valores extremos de la nutación, existiendo dos en el rango de validez del parámetro ($-1 < u < +1$). El movimiento se desarrolla con $f(u) > 0$ y por tanto la nutación estará comprendida entre estas soluciones: $\theta_1 = \arccos u_1$ y $\theta_2 = \arccos u_2$. El valor $u_1 \in [0, 1]$ corresponde al mínimo de la nutación $\theta_1 = \theta_{\min} \in [0, \pi/2]$.

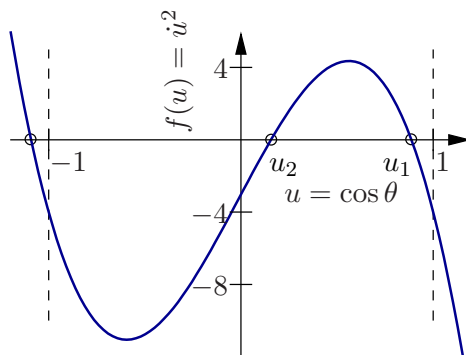
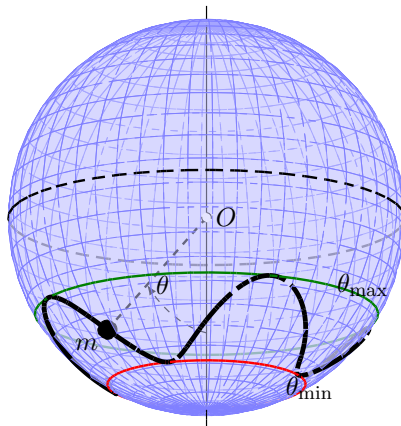


Figura 8.3: La trayectoria del péndulo esférico se sitúa entre dos valores extremos, máximo y mínimo, de la nutación. El mínimo (punto más bajo de la trayectoria) está necesariamente por debajo del punto O , es decir, por debajo del ecuador de la esfera ($\theta_{\min} \in [0, \pi/2]$).



oscilará comprendida entre dos valores extremos $\theta_{\min} = \arccos u_1$ y $\theta_{\max} = \arccos u_2$ correspondientes a las dos soluciones citadas (figura 8.3).

Se puede demostrar que en el péndulo el mínimo de θ necesariamente debe estar por debajo del punto de apoyo O , es decir, $0 \leq \theta_{\min} \leq \pi/2$. En efecto, obtenemos la ecuación de Lagrange en θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta,$$

resultando

$$ml^2 \ddot{\theta} = ml^2 \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgl \sin \theta.$$

Para $\pi/2 < \theta < \pi$ se verifica $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$; por tanto de la ecuación de Lagrange anterior se deduce que en este intervalo $\ddot{\theta} < 0$, lo que hace

imposible que exista un mínimo dentro de él (en el mínimo debe ser $\ddot{\theta} > 0$). Por tanto θ_{\min} ha de estar necesariamente entre 0 y $\pi/2$, como queríamos demostrar (figura 8.3).

8.2. Movimiento por inercia

8.2.1. Propiedades del movimiento; construcción de Poincot

Cuando un sólido con un punto fijo no tiene fuerzas aplicadas o estas son tales que su momento respecto del punto fijo es nulo ($\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$), el movimiento se produce únicamente por la inercia del mismo, las fuerzas (si existen) no juegan ningún papel. Este *movimiento por inercia* tiene varias propiedades notables, que estudiaremos a continuación.

a) *El momento cinético \mathbf{H}_O es constante.*

Se deduce inmediatamente de la nulidad del momento de las fuerzas,

$$\mathbf{M}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O); \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{H}_O = \text{cte.} \quad \square \quad (8.4)$$

Por tanto \mathbf{H}_O define un vector de módulo y dirección constantes en el espacio. Convencionalmente, escogeremos esta *dirección invariante* como versor \mathbf{K} del *triedro fijo*, y llamaremos H al módulo:

$$\mathbf{H}_O = H\mathbf{K}. \quad (8.5)$$

b) *La Energía Cinética T es constante.*

Si no hay fuerzas aplicadas o si estas no desarrollan trabajo en el movimiento alrededor de un punto fijo, es obvio que la única componente de la energía mecánica es la cinética y que esta debe por tanto conservarse.

También puede desarrollarse una demostración más «formal». Para ello se parte de la constancia de \mathbf{H}_O ,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}); \quad (8.6)$$

premultiplicando escalarmente por $\boldsymbol{\Omega}$, que es perpendicular al segundo sumando de la expresión anterior, resulta:

$$0 = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}); \quad (8.7)$$

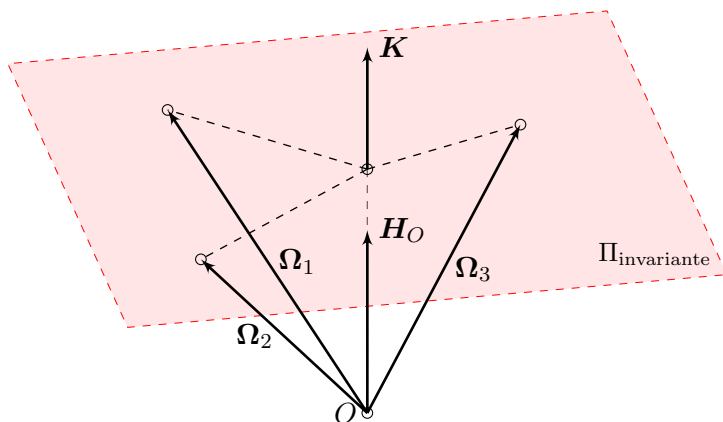
por otra parte, considerando la simetría de \mathbf{I}_O :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right] = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) = 0. \quad \square \quad (8.8)$$

Como corolario de esta última propiedad, se puede afirmar que

«la proyección de $\boldsymbol{\Omega}$ sobre la dirección invariante $\mathbf{K} = \mathbf{H}_O/H$ es constante.»

Figura 8.4: En el movimiento por inercia la proyección de $\boldsymbol{\Omega}$ sobre la dirección fija de \mathbf{H}_O es constante, estando el extremo del vector $\boldsymbol{\Omega}$ situado sobre el plano invariante.



En efecto,

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{H}_O = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = 2T \quad (\text{cte.}) \quad (8.9)$$

Este resultado admite una interpretación geométrica: el extremo del vector $\boldsymbol{\Omega}$, supuesto su origen en O , pertenece a un plano fijo, perpendicular a \mathbf{H}_O y situado a una distancia $2T/H$, denominado *plano invariante* (figura 8.4).

c) De la expresión de \mathbf{H}_O se obtiene una constante:

$$H^2 = \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{H}_O = (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O^2 \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad (8.10)$$

donde se ha tenido en cuenta la simetría de \mathbf{I}_O . Por otra parte, de la expresión de T se obtiene otra constante:

$$2T = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (8.11)$$

Multiplicando (8.10) por $2T$, (8.11) por H^2 y restando ambos términos:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot (H^2 \mathbf{I}_O - 2T \mathbf{I}_O^2) \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (8.12)$$

Esta ecuación define una forma cuadrática degenerada, en función de la matriz de coeficientes constante $[\mathbf{A}] = H^2[\mathbf{I}_O] - 2T[\mathbf{I}_O]^2$. Esta forma es la expresión general de un *cono cuádrico*¹, es decir un cono cuya sección recta es en general una elipse, siendo $\boldsymbol{\Omega}$ una generatriz del cono. Este cono se denomina *cono del cuerpo*, y a lo largo del movimiento rueda sin deslizar sobre el *cono fijo*, superficie que describe $\boldsymbol{\Omega}$ en relación al triedro fijo. Este último es también un cono, al pasar su generatriz $\boldsymbol{\Omega}$ siempre por el punto O , aunque por lo general no es cuádrico. Ambos conos corresponden, respectivamente, a los axoides móvil y fijo del movimiento del sólido (apartado 6.1.2).

d) La constancia de la energía cinética permite escribir:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \left(\frac{\mathbf{I}_O}{2T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) = 1,$$

expresión que es enteramente análoga a (7.53) que define el elipsoide de inercia, sin más que aplicar el factor de escala $\mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega}/\sqrt{2T}$ (recordemos que T es constante). Por lo tanto, el lugar geométrico definido por el vector $\boldsymbol{\Omega}/\sqrt{2T}$ es precisamente el elipsoide de inercia².

La normal a este elipsoide viene definida por el gradiente de la superficie:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Omega}} \left[\boldsymbol{\Omega} \cdot \left(\frac{\mathbf{I}_O}{2T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) \right] = \frac{\mathbf{I}_O}{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{H}_O}{T}, \quad (8.13)$$

es decir, coincide con la dirección invariante, normal al plano invariante. Comprobamos por tanto que este elipsoide en el punto definido por $\boldsymbol{\Omega}$ es tangente precisamente al plano invariante definido en la propiedad b).

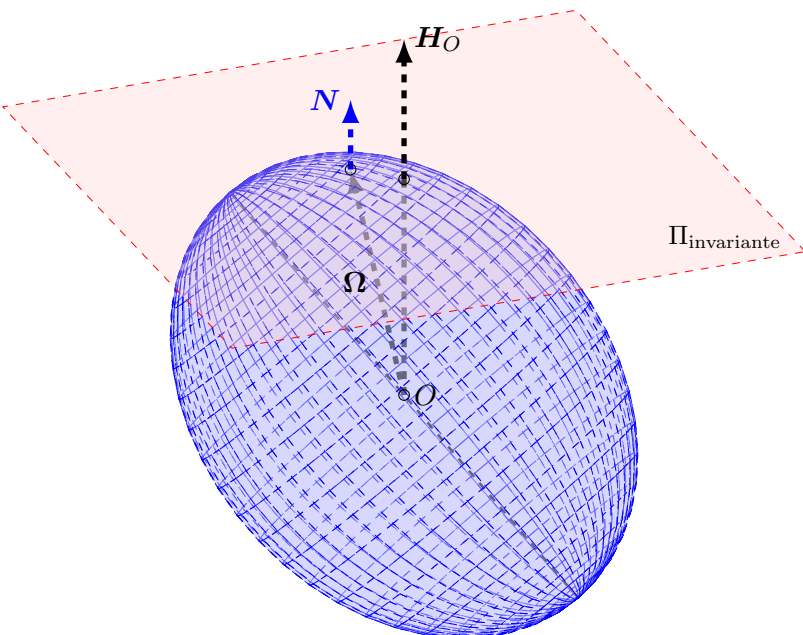
En resumen, las propiedades anteriores del movimiento por inercia permiten la siguiente construcción geométrica debida a Poincot que lo define:

1. El vector $\boldsymbol{\Omega}$ pertenece a un *elipsoide* homotético al de inercia (de razón $\sqrt{2T}$), con centro en O , que permanece tangente a lo largo del movimiento al *plano invariante*, plano perpendicular a \mathbf{H}_O y situado

¹La ecuación general de un cono cuádrico en ejes principales es $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$, siendo a y b los semiejes de la sección recta elíptica. Como caso particular $a = b$ se obtiene el cono recto circular, $x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = 0$. Es posible comprobar, desarrollando las componentes en ejes principales de la matriz $[\mathbf{A}]$ que se obtiene una ecuación de este tipo, y que si el tensor de inercia es cilíndrico será un cono recto circular.

²Otra manera de expresar lo mismo es diciendo que $\boldsymbol{\Omega}$ define un elipsoide homotético al de inercia, de razón $\sqrt{2T}$.

Figura 8.5: El extremo de Ω , en relación con el sistema de referencia del cuerpo, está sobre un elipsoide, homotético al de inercia. Este elipsoide es además tangente en todo instante al plano invariante (su normal común es \mathbf{N}), sobre el cual rueda (y pivota) sin deslizar.



a una distancia $2T/H$ de O . Al ser nula la velocidad de todos los puntos del sólido sobre el eje (O, Ω) , el movimiento es una *rodadura sin deslizamiento* del elipsoide sobre el plano invariante³.

2. Considerando un sólido con simetría de revolución⁴ el vector Ω genera en el sistema de referencia del cuerpo un lugar geométrico que es un cono recto circular (*cono del cuerpo*). En una referencia fija, genera otro cono recto circular (*cono fijo*). El movimiento del sólido se puede interpretar como el cono del cuerpo rodando sin deslizar sobre el cono fijo (figura 8.6).

Estos dos conos son precisamente los denominados *axoide móvil* (6.25) y *axoide fijo* (6.26) en el estudio del campo de velocidades.

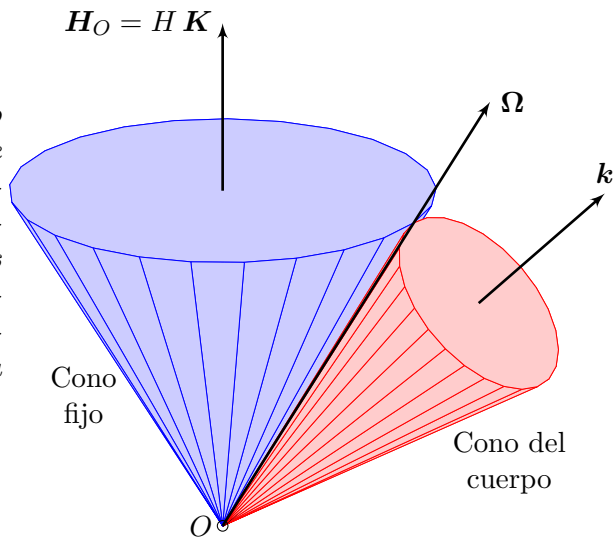
OBSERVACIONES.-

- En general Ω no es constante ni en módulo ni en dirección, a pesar de que H_O sí lo sea.

³El lugar geométrico que define el punto de contacto (definido por Ω) sobre el elipsoide se denomina *Polodia*, mientras que el correspondiente lugar geométrico sobre el plano invariante se llama *Herpolodia*

⁴En realidad basta con que el tensor de inercia sea cilíndrico

Figura 8.6: *El movimiento por inercia es análogo al de un cono móvil con el cuerpo, que rueda sin deslizar sobre un cono fijo. Ambos conos son los axoides del movimiento, y comparten en todo instante una generatriz, definida por el vector Ω .*



- En el caso particular de un sólido de revolución (tensor de inercia cilíndrico), el módulo $\Omega = |\Omega|$ sí será constante, aunque su dirección varíe según la generatriz del cono.

EJEMPLO 8.1: Sea un cilindro macizo homogéneo de radio r , altura h y masa m , que se mueve libremente en el campo gravitatorio simplificado. Se le pone en movimiento comunicándole una velocidad inicial de rotación que forma 45° con el eje del cilindro, y cuya componente según dicho eje vale ω . Describir el movimiento del sólido.

SOLUCIÓN: Los momentos principales de inercia son:

$$A = B = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2; \quad C = \frac{1}{2}mr^2.$$

La velocidad de rotación inicial es $\Omega_0 = (\omega, 0, \omega)$, luego

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= A\omega \mathbf{i} + C\omega \mathbf{k}; & T &= \frac{1}{2}(A\omega^2 + C\omega^2); \\ H &= \omega\sqrt{A^2 + C^2}; & \mathbf{K} &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + C^2}}(A\mathbf{i} + C\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de coeficientes del cono del cuerpo (cf. ecuación (8.12)) es

$$\mathbf{A} = 2T\mathbf{I}_O^2 - H^2\mathbf{I}_O = AC(A - C)\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se trata de un cono de revolución, con vértice en el centro del cilindro y cuyo eje lleva la dirección \mathbf{k} . El semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{k} \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_0}{\Omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Por otra parte, el cono fijo es igualmente un cono de revolución, cuyo eje lleva la dirección de \mathbf{K} y el semiángulo cónico es

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{K} \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_0}{\Omega_0} = \frac{A + C}{\sqrt{2}\sqrt{A^2 + C^2}}.$$

A su vez, el elipsoide de inercia será de revolución con semiejes $(1/\sqrt{A}, 1/\sqrt{C})$, siendo su ecuación $Ax^2 + Ay^2 + Cz^2 = 1$. El vector velocidad angular, en el sistema de referencia del cuerpo, permanece sobre un elipsoide homotético al de inercia, de ecuación

$$Ap^2 + Aq^2 + Cr^2 = 2T,$$

donde (p, q, r) son las componentes de $\boldsymbol{\Omega}$.

8.2.2. Ejes permanentes de rotación

En el apartado anterior hemos observado que el vector velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ no tiene porqué ser constante, ni en dirección ni en módulo, en un caso general de movimiento por inercia. Se plantea ahora obtener las condiciones para que la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ pueda permanecer constante. Se denomina *eje permanente de rotación* de un sólido aquél que, para un movimiento por inercia con velocidad de rotación inicial alrededor de dicho eje, se mantenga invariante la dirección de rotación.

Sea el eje (O, \mathbf{e}) , y una velocidad de rotación inicial $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \mathbf{e}$. Suponemos que la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ permanece según la misma dirección \mathbf{e} a lo largo del movimiento. En primer lugar, observemos que puesto que la energía T es constante,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\Omega^2}{2} I_e = \text{cte},$$

siendo $I_e = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e})$, momento de inercia respecto al eje (O, \mathbf{e}) . Al ser éste constante se deduce que el módulo de $\boldsymbol{\Omega}$ tampoco varía: $\Omega = \Omega_0$.

Por otra parte, de la ecuación de Euler (7.66), al ser $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{0} = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}).$$

Se deduce por tanto que $\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}$ ha de ser paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, es decir la dirección \mathbf{e} debe ser principal de inercia en O . Por tanto, un eje permanente de rotación será *necesariamente un eje principal de inercia del sólido*.

Esta condición, que es necesaria, no basta sin embargo para garantizar la *estabilidad* del eje permanente de rotación. Para analizar este aspecto, elegiremos unos ejes del cuerpo de forma que \mathbf{k} corresponda con la dirección principal que se desea estudiar, según la cual se imprime una velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$. Supongamos que se producen unas inevitables perturbaciones pequeñas en las otras dos direcciones perpendiculares, con lo que la velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv (\epsilon_p, \epsilon_q, r) \quad \text{siendo } \epsilon_p, \epsilon_q \ll r$$

La estabilidad de $\boldsymbol{\Omega}$ como dirección permanente de rotación equivale a garantizar que las perturbaciones introducidas (ϵ_p, ϵ_q) se mantengan pequeñas (acotadas) a lo largo del movimiento. Si por el contrario estas perturbaciones crecen sin estar acotadas, el movimiento de rotación alrededor de dicho eje será inestable.

Analicemos por tanto la evolución de (ϵ_p, ϵ_q) . Desarrollando para este caso las ecuaciones de Euler (7.67) con $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} 0 &= A\dot{\epsilon}_p - (B - C)\epsilon_q r \\ 0 &= B\dot{\epsilon}_q - (C - A)r\epsilon_p \\ 0 &= C\dot{r} - (A - B)\epsilon_p\epsilon_q \simeq C\dot{r} \end{aligned} \quad (8.14)$$

De la ecuación (8.14₃), despreciando infinitésimos de orden superior, se deduce que $r = \text{cte}$. Derivando (8.14₁),

$$0 = A\ddot{\epsilon}_p - (B - C)\dot{\epsilon}_q r;$$

despejando de (8.14₂) $(\dot{\epsilon}_q = (C - A)r\epsilon_p/B)$ y eliminando en la ecuación anterior se obtiene finalmente:

$$A\ddot{\epsilon}_p + \frac{(C - B)(C - A)}{B} r^2 \epsilon_p = 0.$$

Se trata de una ecuación diferencial de segundo grado en función exclusivamente de ϵ_p . Es una ecuación similar a la del oscilador armónico simple (apartado 4.1),

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Como se vió esta ecuación tiene solución armónica (acotada) para x si $k > 0$, mientras que tendrá una solución exponencial (monótona creciente, no

acotada) si $k < 0$. Así, la condición de estabilidad para que ϵ_p se mantenga pequeña es:

$$(C - B)(C - A) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{bien} & C > B \text{ y } C > A, \\ \text{ó bien} & C < B \text{ y } C < A. \end{cases}$$

Por lo tanto para que el eje principal sea estable como eje permanente ha de corresponder bien al máximo, bien al mínimo, de los momentos principales de inercia. En el caso en que corresponda al intermedio, no podrá ser eje permanente, siendo en este caso el movimiento inestable.

La propiedad anterior se puede confirmar experimentalmente con numerosos objetos de uso cotidiano, arrojándolos al aire con una velocidad de rotación inicial, en caída libre. Es fácil verificar que sometido únicamente a su propio peso, para un objeto en caída libre el momento en el centro de masa G es nulo⁵, por lo que experimenta un movimiento por inercia alrededor de G .

Podemos realizar el experimento con una caja rectangular de cartón fácil de encontrar en cualquier domicilio u oficina. Admitiendo que la caja es sensiblemente plana, como se muestra en la figura 8.7, dos momentos principales de inercia corresponden a los dos ejes de simetría dentro del plano A y B . La planitud de la caja permite deducir que para la tercera dirección principal, normal al plano, el momento de inercia será suma de los otros dos ($C = A + B$) y por tanto el máximo. Por otra parte, el momento del eje paralelo al lado menor del rectángulo (B en la figura) será mayor que el otro (A), por lo que B será el intermedio y A el mínimo. Si se lanza la caja al aire girando alrededor de los ejes C o A , permanecerá en rotación estable, mientras que la rotación alrededor del eje B es inestable.

Análogamente podríamos probar con una raqueta de tenis o de ping-pong. En este caso el momento de inercia mínimo corresponde al eje del mango, y el máximo al eje perpendicular al plano de la raqueta⁶.

⁵En efecto, para un cuerpo \mathcal{B} de masa M :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \wedge (-g\mathbf{k}) \rho dV = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge g\mathbf{k} \rho dV + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} \rho dV \\ &= -M\mathbf{r}_G \wedge g\mathbf{k} + \mathbf{r}_G \wedge Mg\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Como receta, es válido suponer que un campo de fuerzas uniforme y paralelo como el gravitatorio simplificado produce en el sólido el mismo efecto que su resultante ($-Mg\mathbf{k}$) “aplicada” en el CDM (G).

⁶Algún autor denomina este resultado como el *teorema de la raqueta de tenis* (E. Neal Moore, *Theoretical Mechanics*, Wiley 1983)

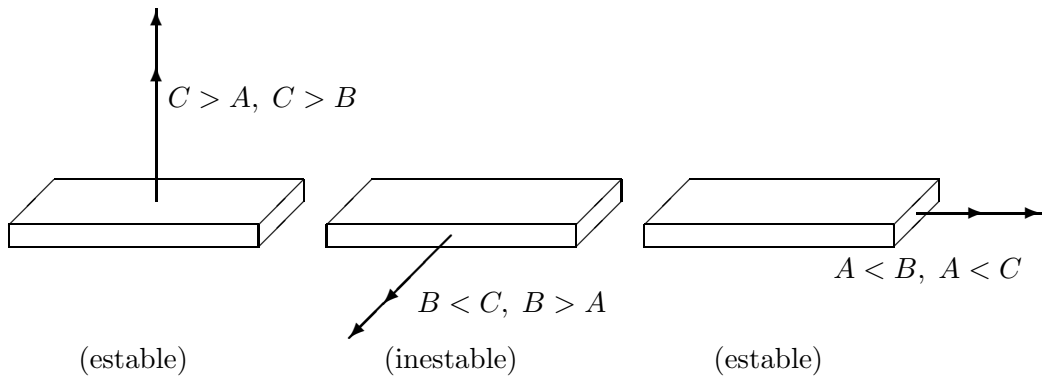


Figura 8.7: Los ejes de momento de inercia máximo (C) y mínimo (A) permiten movimientos de rotación permanente estables, mientras que el intermedio (B) es inestable.

8.2.3. Ecuaciones del movimiento

Veremos a continuación las ecuaciones concretas que gobiernan la evolución de los ángulos de Euler y las velocidades angulares para el movimiento de Poinsot descrito geoméricamente en el apartado 8.2.1. Plantearemos primero el caso general y a continuación el caso particular en que dos momentos principales sean iguales (sólido de revolución), en que la solución se simplifica considerablemente y se puede integrar directamente.

Caso general.— Las componentes de la velocidad de rotación en el triedro del cuerpo son $\boldsymbol{\Omega} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, cuya expresión en función de los ángulos de Euler es (6.54):

$$p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \tag{8.15}$$

$$q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \tag{8.16}$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \tag{8.17}$$

La expresión del momento cinético es, a partir de (8.5) y (6.53)

$$\mathbf{H}_O = H\mathbf{K} = H(\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}). \tag{8.18}$$

Es posible obtener otra expresión del momento cinético en el triedro del cuerpo aplicando directamente (7.31). Supondremos para ello, sin pérdida de generalidad, que los ejes son los principales de inercia, con momentos de inercia (A, B, C):

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = Ap\mathbf{i} + Bq\mathbf{j} + Cr\mathbf{k}. \tag{8.19}$$

Igualando componentes entre (8.18) y (8.19),

$$p = \frac{H}{A} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi; \quad (8.20)$$

$$q = \frac{H}{B} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi; \quad (8.21)$$

$$r = \frac{H}{C} \cos \theta. \quad (8.22)$$

De (8.22) se puede despejar

$$\cos \theta = \frac{Cr}{H}; \quad (8.23)$$

y del cociente término a término entre las ecuaciones (8.20) y (8.21)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Ap}{Bq}. \quad (8.24)$$

Sumando la ecuación (8.15) multiplicada por $\operatorname{sen} \varphi$ a la (8.16) multiplicada por $\cos \varphi$, se puede despejar $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{p \operatorname{sen} \varphi + q \cos \varphi}{\operatorname{sen} \theta};$$

eliminando de (8.20) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{pA}{H \operatorname{sen} \theta}$ y de (8.21) $\cos \varphi = \frac{qB}{H \operatorname{sen} \theta}$, obtenemos:

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \operatorname{sen}^2 \theta},$$

y por último, eliminando $\operatorname{sen}^2 \theta$ en virtud de (8.23),

$$\dot{\psi} = \frac{Ap^2 + Bq^2}{H \left(1 - \frac{C^2 r^2}{H^2}\right)} = H \frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2} \quad (8.25)$$

Las ecuaciones (8.23, 8.24, 8.25), junto con las tres ecuaciones de Euler,

$$0 = A\dot{p} - (B - C)qr \quad (8.26)$$

$$0 = B\dot{q} - (C - A)rp \quad (8.27)$$

$$0 = C\dot{r} - (A - B)pq \quad (8.28)$$

forma un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas: $(\psi, \theta, \varphi, p, q, r)$, que se puede resolver de manera autónoma.

Sólido de revolución.— Sea el caso particular de un sólido de revolución⁷. Según se sabe (apartado 7.3.5) un eje de revolución es siempre principal de inercia. Todos los ejes normales a éste son también principales y tienen igual momento de inercia. Tomaremos convencionalmente la dirección \mathbf{k} según el eje de revolución; los momentos de inercia serán C (según \mathbf{k}) y $A = B$ (según direcciones perpendiculares a \mathbf{k}).

En la tercera ecuación de Euler (8.28) el segundo sumando se anula, por lo que:

$$C\dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \text{cte.}$$

De la igualdad (8.23) con r constante, se deduce que la nutación es también constante:

$$\cos \theta = \frac{Cr}{H} \quad \Rightarrow \quad \theta = \text{cte.}$$

La interpretación geométrica de la nutación (figura 8.8) es el ángulo que forma el eje del cuerpo (\mathbf{k}) con el eje invariante (\mathbf{K}) (recuérdese que en el movimiento por inercia se ha tomado convencionalmente \mathbf{K} según la dirección fija de \mathbf{H}_O).

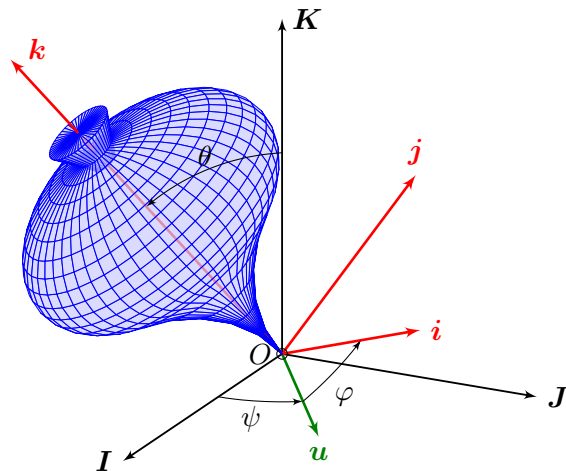


Figura 8.8: Interpretación geométrica de los ángulos de Euler para el movimiento de Poincaré de un sólido con simetría de revolución.

De la ecuación (8.25) con $A = B$ se obtiene:

$$\dot{\psi} = H \frac{Ap^2 + Aq^2}{A^2p^2 + A^2q^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{H}{A} \quad (\text{cte}).$$

⁷No es necesario estrictamente que el sólido sea de revolución, basta con que el tensor de inercia sea cilíndrico, es decir, con dos momentos principales iguales ($A = B$).

Por último, a partir de este último resultado y las ecuaciones (8.17) y (8.23),

$$\dot{\varphi} = \frac{A - C}{A} r \quad (\text{cte}).$$

Por tanto, en el caso en que el sólido sea de revolución, en el movimiento por inercia el eje del cuerpo \mathbf{k} describe un cono circular alrededor de la dirección invariante (nutación θ constante). El movimiento de precesión de dicho eje \mathbf{k} alrededor de la dirección invariante \mathbf{K} tiene velocidad $\dot{\psi}$ constante, y adicionalmente una velocidad de rotación propia $\dot{\varphi}$ alrededor de \mathbf{k} asimismo constante. El cono del cuerpo es de revolución, con semiángulo cónico dado por $\alpha = \arctg\left(\frac{C}{A} \operatorname{tg} \theta\right)$. El cono fijo es también de revolución, con semiángulo $\beta = \theta \pm \alpha$ (dos casos posibles).

8.3. La peonza simétrica

8.3.1. Ecuaciones del movimiento de una peonza

Consideramos ahora un caso algo más completo, el de un sólido simétrico⁸, sometido a su propio peso (en un campo gravitacional constante) y con un punto de su eje de simetría fijo. Supondremos además que tiene una velocidad de rotación propia alrededor de su eje suficientemente elevada. Este caso corresponde a la peonza de los juegos infantiles (figura 8.9), pero también sirve para explicar el comportamiento de los giróscopos empleados en la navegación inercial de naves y el control de la orientación de sofisticados instrumentos como los telescopios espaciales. Como veremos, el movimiento de la peonza introduce algunas interesantes paradojas debidas al denominado *efecto giroscópico*.

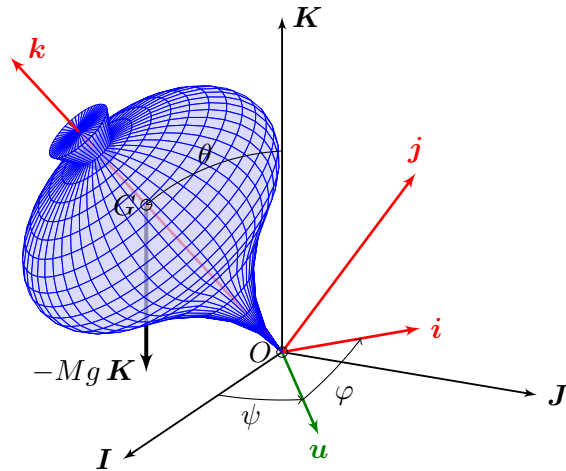
Figura 8.9: Peonza simétrica sometida a su propio peso, con rotación propia elevada alrededor de su eje.



El movimiento lo describiremos en los ejes locales del cuerpo, tomando \mathbf{k} según el eje de revolución (figura 8.10), por lo que el tensor de inercia es:

⁸con tensor de inercia cilíndrico, como es el caso de un cuerpo de revolución

Figura 8.10: Orientación de los ejes considerados para el movimiento de una peonza simétrica sometida a su propio peso alrededor de un punto fijo O de su eje.



$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} .$$

Emplearemos el método de Lagrange para obtener las ecuaciones del movimiento. La energía cinética vale:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + \frac{1}{2} Cr^2$$

y desarrollando la expresión en función de los ángulos de Euler (6.54):

$$T = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 .$$

A su vez, el potencial es

$$V = Mgd \cos \theta$$

donde se ha llamado $d = \overline{OG}$, distancia entre el punto fijo y el centro de masas. La Lagrangiana resulta entonces:

$$L = \frac{1}{2} A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - Mgd \cos \theta . \quad (8.29)$$

Se observa que L no depende explícitamente de ψ ($\partial L / \partial \psi = 0$) ni de φ ($\partial L / \partial \varphi = 0$); por lo tanto ambas coordenadas son cíclicas, y podemos escribir las correspondientes integrales primeras como ecuaciones del movimiento:

$$p_\psi = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + C\dot{\psi} \cos^2 \theta + C\dot{\varphi} \cos \theta = H \quad (\text{cte}) \quad (8.30)$$

$$p_\varphi = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = Cr \quad (\text{cte}) \quad (8.31)$$

La integral primera (8.30) corresponde a la constancia del momento cinético según el eje vertical \mathbf{K} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O \cdot \mathbf{K} &= (A p \mathbf{i} + A q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}) \cdot (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}) \\ &= A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C r \cos \theta \\ &= A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C \dot{\psi} \cos^2 \theta + C \dot{\varphi} \cos \theta = H. \quad \square \end{aligned}$$

Esta magnitud H se conserva puesto que el momento de las fuerzas en esta dirección fija es nulo:

$$M_Z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{K} = [d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K})] \cdot \mathbf{K} = 0. \quad (8.32)$$

La segunda integral primera (8.31) expresa la constancia de r , componente de la velocidad de rotación $\boldsymbol{\Omega}$ según el eje \mathbf{k} del cuerpo; de forma equivalente, se puede considerar que establece la conservación del momento cinético según este eje:

$$\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k} = (A p \mathbf{i} + A q \mathbf{j} + C r \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = C r. \quad (8.33)$$

La conservación de esta magnitud no es tan obvia como en el caso anterior, al ser \mathbf{k} una dirección móvil. Para justificarla derivamos directamente (8.33),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}_O \right) \cdot \mathbf{k} + \mathbf{H}_O \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} \\ &= \cancel{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}} + \mathbf{H}_O \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{k}) = \cancel{(A - B) p q}, \end{aligned}$$

siendo este término nulo gracias a que el sólido es de revolución ($A = B$).

Al no existir fuerzas disipativas, otra integral primera es la constancia de la energía, $T + V = E$.

En resumen el movimiento de la peonza simétrica con un punto fijo viene determinado por las tres integrales primeras siguientes:

$$H = A \dot{\psi} \sin^2 \theta + C r \cos \theta \quad (\text{cte}) \quad (8.34)$$

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad (\text{cte}) \quad (8.35)$$

$$E = \frac{1}{2} A (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C r^2 + M g d \cos \theta \quad (\text{cte}) \quad (8.36)$$

A continuación estudiamos la solución de estas ecuaciones, lo que se desarrollará de manera cualitativa. En primer lugar despejamos $\dot{\psi}$ de (8.34),

$$\dot{\psi} = \frac{H - C r \cos \theta}{A \sin^2 \theta} \quad (8.37)$$

para después eliminarla en (8.36), obteniendo así una ecuación función de θ exclusivamente, que expresaremos en relación a la nueva constante E' :

$$E' \stackrel{\text{def}}{=} E - \frac{1}{2}Cr^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{(H - Cr \cos \theta)^2}{2A \sin^2 \theta} + Mgd \cos \theta \quad (8.38)$$

Realizando el cambio de variable:

$$u = \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}$$

se obtiene

$$E' = \frac{1}{2}A\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(H - Cru)^2}{2A(1-u^2)} + Mgd u$$

y despejando \dot{u}^2 ,

$$\dot{u}^2 = f(u) = (1-u^2) \left(\frac{2E'}{A} - \frac{2Mgd u}{A} \right) - \frac{(H - Cru)^2}{A^2} \quad (8.39)$$

Ecuación cuya solución se obtendría directamente mediante la cuadratura:

$$t(u) = \int_{u_0}^{u_t} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(2E'/A - 2Mgd u/A) - (H - Cru)^2/A^2}} \quad (8.40)$$

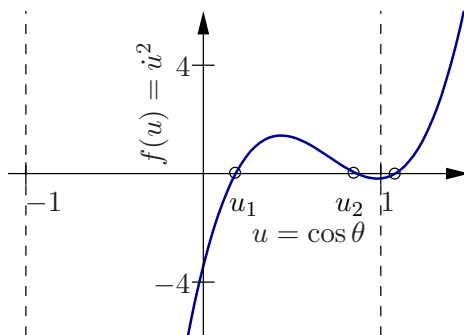
Una vez calculado $u(t)$ y en consecuencia $\theta(t)$, sustituiríamos en las ecuaciones (8.34) y (8.35) para obtener ψ y φ respectivamente. La cuadratura planteada en (8.40) no es inmediata de manera analítica, pero se puede abordar mediante integrales elípticas, o bien por métodos numéricos.

Sin necesidad de obtener la solución explícita, podemos sin embargo estudiar de manera cualitativa el movimiento. Para ello, observemos que las raíces de la ecuación (8.39): $f(u) = 0$, corresponden a los puntos en que $\dot{u} = 0$ y por tanto $\dot{\theta} = 0$, es decir los máximos o mínimos locales de θ . Al ser $f(u)$ un polinomio cúbico, podrá tener hasta tres raíces reales. Podemos acotar dos raíces de esta ecuación, observando que para los valores

$$u = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad f(u) = -\frac{(H - Cru)^2}{A^2} < 0$$

El rango de validez de u es precisamente $-1 < u < +1$, correspondiente a $\pi > \theta > 0$. Al ser $f(u) = \dot{u}^2$ esencialmente positivo en el movimiento real, por motivos físicos en este rango existirá al menos una zona en que $f(u) > 0$. Por tanto en el intervalo $[-1, +1]$ existirán dos raíces u_1 y u_2 . Así, θ oscilará entre los dos valores correspondientes $\theta_1 = \arccos u_1$ y $\theta_2 = \arccos u_2$, máximo y mínimo de la nutación, $\theta_1 > \theta > \theta_2$ (figura 8.11).

Figura 8.11: Gráfico de la ecuación cúbica $f(u)$ obtenida a partir de la integral primera de la energía, en función de $u = \cos\theta$. Las raíces $f(u) = 0$ corresponden a los valores extremos de la nutación, existiendo dos en el rango de validez del parámetro ($-1 < u < +1$). El movimiento se desarrolla con $f(u) > 0$ y por tanto la nutación estará comprendida entre estas soluciones: $\theta_1 = \arccos u_1$ y $\theta_2 = \arccos u_2$. La solución u_2 corresponde en este caso al mínimo de la nutación ($\theta_2 = \theta_{min}$).



Una forma de visualizar geoméricamente el movimiento es a través de la trayectoria descrita por extremo del vector del eje de revolución \mathbf{k} , que podrá describir distintos tipos de curvas sobre una esfera de radio unidad, en la coordenada θ será la *colatitud* y ψ la *longitud*. El movimiento quedará restringido a la banda entre los dos paralelos extremos: $\theta_1 > \theta > \theta_2$ (ver figura 8.12). Los distintos comportamientos vienen definidos por el signo de la velocidad de precesión, obtenido por el numerador en la ecuación (8.37), pudiéndose distinguir tres casos en función de las condiciones iniciales del movimiento (en concreto según el valor de las constantes H y r):

1. $H - Cr \cos \theta_2 > 0$ y $H - Cr \cos \theta_1 > 0$, en cuyo caso el movimiento de precesión es uniforme, siempre tiene el mismo sentido (figura 8.12a);
2. $H - Cr \cos \theta_2 < 0$ y $H - Cr \cos \theta_1 > 0$, en cuyo caso la precesión alterna de signo, con un movimiento de sentido oscilante que desarrolla lazos (figura 8.12b);
3. $H - Cr \cos \theta_2 = 0$, en cuyo caso se producen paradas en la recesión, correspondiendo a cúspides en la trayectoria para los puntos con velocidad de precesión nula. Este caso se produce en la práctica cuando las condiciones iniciales corresponden a la peonza con rotación propia y su eje partiendo del reposo ($\dot{\theta} = \dot{\psi} = 0$), a partir de una inclinación determinada (nutación θ_2). A continuación la peonza empieza a caer y precesionar simultáneamente (figura 8.12c).

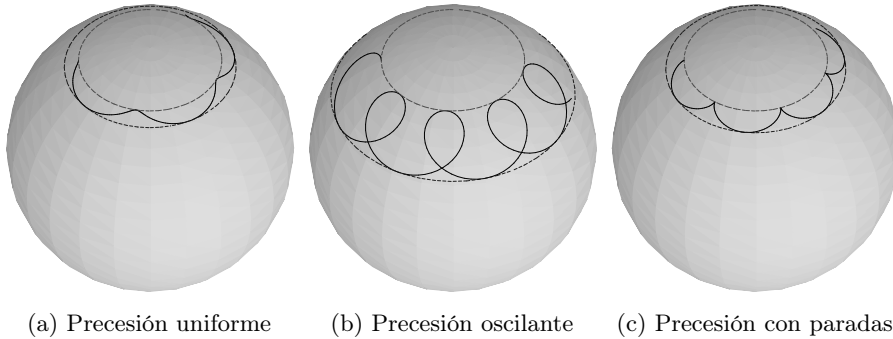


Figura 8.12: *Los tres tipos de soluciones para el movimiento de la peonza simétrica, obtenidos mediante integración numérica en el ordenador de las ecuaciones del movimiento. La figura representa, sobre una superficie esférica, la trayectoria del extremo del eje de revolución de la peonza. En el caso (a) la velocidad de precesión lleva sentido uniforme; en el caso (b) alterna de signo, describiendo bucles; en el caso límite (c), para los puntos con nutación mínima se anula $\dot{\psi}$, correspondiendo a cúspides en la trayectoria.*

8.3.2. Estabilidad de la peonza dormida

Estudiamos ahora la estabilidad del movimiento de la peonza simétrica, cuyas ecuaciones se desarrollaron en el apartado 8.3.1, en la posición vertical ($\theta = 0$, peonza «dormida»). El estudio de estabilidad tiene como objetivo analizar bajo qué condiciones un movimiento posible, cuando está sometido a una pequeña perturbación, se mantiene con pequeñas oscilaciones y próximo al movimiento original, en cuyo caso se denomina *estable*. En el caso contrario, cualquier perturbación pequeña respecto del movimiento producirá la pérdida del mismo, denominándose *inestable*. Este estudio de estabilidad es similar al desarrollado en el capítulo 5 (apartado 5.1.2), con la diferencia que allí las perturbaciones eran respecto a la posición de equilibrio mientras que aquí lo son a una trayectoria dinámica.

Partiremos de la ecuación de Lagrange en θ , que se obtiene derivando la Lagrangiana (8.29):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = A\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr(-\dot{\psi} \sin \theta) + Mgd \sin \theta,$$

resultando

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0. \quad (8.41)$$

Esta ecuación se ve complementada por las dos integrales primeras de la peonza simétrica, expresadas anteriormente en (8.34) y (8.35):

$$H = A\dot{\psi} \sin^2 \theta + Cr \cos \theta = \text{cte.} \quad (8.42)$$

$$Cr = \text{cte.} \quad (8.43)$$

Al ser inicialmente $\theta = 0$, de la primera de las expresiones anteriores (8.42) se deduce que la constante es $H = Cr$. Empleando este valor y despejando $\dot{\psi}$ en (8.42),

$$\dot{\psi} = \frac{H - Cr \cos \theta}{A \sin^2 \theta} = \frac{Cr}{A} \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta};$$

considerando una pequeña perturbación $\delta\theta \ll 1$, desarrollando en esta expresión denominador y numerador de forma que se desprecien términos de orden superior a 2,

$$\dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A} \frac{\delta\theta^2/2}{\delta\theta^2} = \frac{Cr}{2A}.$$

Sustituimos ahora este valor de $\dot{\psi}$ en (8.41), y desarrollamos despreciando de nuevo los términos de orden 2 ó superior en función de $\delta\theta$:

$$A\delta\ddot{\theta} - A \left(\frac{Cr}{2A} \right)^2 \delta\theta + Cr \frac{Cr}{2A} \delta\theta - Mgd\delta\theta = A\delta\ddot{\theta} + \left(\frac{C^2r^2}{4A} - Mgd \right) \delta\theta = 0. \quad (8.44)$$

Observamos que esta ecuación corresponde a la de un oscilador armónico simple, siempre que el coeficiente de $\delta\theta$ sea positivo, en cuyo caso resulta un movimiento armónico acotado para la perturbación $\delta\theta$. La condición de estabilidad es por tanto

$$\frac{C^2r^2}{4A} > Mgd. \quad (8.45)$$

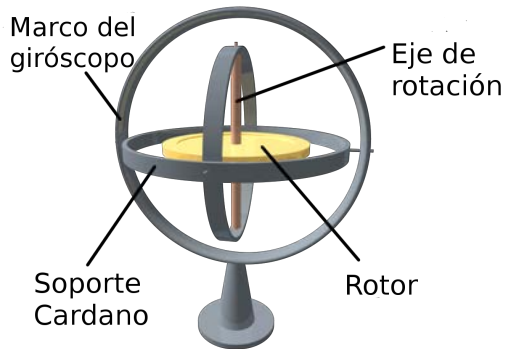
El significado de este resultado es que para la estabilidad de la peonza en la posición vertical por encima del punto fijo se debe mantener una velocidad de rotación r alrededor del eje suficientemente elevada; cuando la energía se haya disipado por rozamiento u otras causas y la velocidad sea menor a este valor la peonza comenzará a desarrollar un movimiento de nutación cada vez más amplio.

Se deja como ejercicio para el lector comprobar que en la posición inversa, con el eje de la peonza vertical pero colgando por debajo del punto fijo ($\theta = \pi$) el movimiento resulta estable en cualquier caso, como parecería esperable. Para ello basta estudiar las perturbaciones $\theta = \pi + \delta\theta$ haciendo los desarrollos en serie alrededor de $\theta = \pi$.

8.4. Efecto giroscópico

El giróscopo es un cuerpo con simetría de masas de revolución girando con velocidad de rotación elevada respecto de dicho eje. Sometido a un momento de fuerzas transversal al eje el giróscopo modifica mucho menos su orientación que un sólido ordinario y además en una dirección inesperada, perpendicularmente a las fuerzas aplicadas del par. En estas condiciones se produce el llamado «efecto giroscópico» que se describe abajo.

Figura 8.13: *Giróscopo montado en soportes de Cardano.*



Si el momento externo se minimiza mediante el montaje del giróscopo en soportes de Cardano (figura 8.13), la orientación del eje se mantiene prácticamente invariable y el giróscopo resulta un instrumento eficaz para señalar una orientación fija en el espacio, lo que constituye la base de los sistemas de navegación y control de orientación inerciales. Estos resultan más precisos que las brújulas magnéticas o incluso imprescindibles cuando se está alejado del campo magnético o gravitatorio terrestre como en las naves espaciales⁹.

Existen también dispositivos denominados giróscopos basados en estructuras vibrantes, fundamentados en un principio ligeramente diferente, el de vibración de dos masas en un plano, cuya resistencia a cambiar la orientación se origina por la fuerza inercial de Coriolis. Estos dispositivos se han podido miniaturizar como MEMS¹⁰ y fabricar de forma muy eficiente, permitiendo de forma fiable por ejemplo el control de orientación de los Segway PT¹¹, de los iPhone 4¹² o de los controladores *Wii motion plus*¹³ para la consola de juegos de Nintendo.

⁹<http://www2.jpl.nasa.gov/basics/bsf11-2.php>

¹⁰Microelectromechanical systems

¹¹http://en.wikipedia.org/wiki/Segway_Human_Transporter

¹²http://en.wikipedia.org/wiki/IPhone_4

¹³http://en.wikipedia.org/wiki/Wii_MotionPlus

Veremos en primer lugar el efecto giroscópico aplicado a un giróscopo con un punto de su eje fijo, como es el caso de la peonza simétrica estudiada en el apartado anterior. La condición de rotación propia elevada la concretaremos admitiendo que la energía cinética de rotación alrededor de su eje sea mucho mayor que las posibles fluctuaciones de energía potencial gravitatoria. Como máximo, estas se producen al variar la altura de G entre $[-d, +d]$. Admitimos por tanto que

$$\frac{1}{2}Cr^2 \gg 2Mgd. \quad (8.46)$$

De esta manera, al ser la energía asociada a la rotación propia mucho mayor, cabe esperar que las oscilaciones de nutación (θ) debidas al potencial gravitatorio sean pequeñas, produciéndose un movimiento de precesión con pequeñas oscilaciones de nutación. En la realidad, debido al inevitable amortiguamiento, estas oscilaciones pequeñas se amortiguan, dando lugar con bastante aproximación a un movimiento con nutación prácticamente constante.

En el planteamiento de las ecuaciones de Lagrange vimos que las correspondientes a ψ y φ daban lugar a sendas integrales primeras (8.34) y (8.35). La ecuación dinámica en θ es (8.41):

$$A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta - Mgd \sin \theta = 0.$$

Deseamos comprobar las condiciones bajo las que se puede dar un movimiento con nutación cuasi-constante. Linealizando esta ecuación suponiendo que las oscilaciones de θ son pequeñas, $\ddot{\theta} \approx 0$ y simplificando $\sin \theta$, se obtiene:

$$-A\dot{\psi}^2 \cos \theta + Cr\dot{\psi} - Mgd = 0.$$

y resolviendo para $\dot{\psi}$,

$$\dot{\psi} = \frac{Cr}{2A \cos \theta} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4AMgd \cos \theta}{C^2 r^2}} \right). \quad (8.47)$$

Para que puedan existir soluciones reales el radicando debe ser positivo, es decir $C^2 r^2 > 4AMgd \cos \theta$. Debido a la hipótesis anteriormente realizada (8.46) podemos considerar que se garantiza esta condición. Por otra parte, considerando que la raíz en (8.47) se puede aproximar como $\sqrt{1 - \epsilon} \approx 1 - \epsilon/2$ (teniendo en cuenta $\epsilon \ll 1$) se obtienen dos soluciones posibles para $\dot{\psi}$:

$$\begin{cases} \dot{\psi} \approx \frac{Cr}{A \cos \theta} & \text{(precesión rápida)} \\ \dot{\psi} \approx \frac{Mgd}{Cr} & \text{(precesión lenta).} \end{cases} \quad (8.48)$$

De las dos soluciones, la que se obtiene en la mayoría de los casos prácticos es la precesión lenta. Aunque en teoría sería posible la otra solución, la energía requerida es mucho mayor, por lo que es difícil alcanzar las condiciones iniciales precisas. No entramos en consideraciones de la estabilidad de las soluciones, que también juegan en contra de la precesión rápida por lo general.

Vemos pues que, en el caso del giróscopo sujeto a una fuerza gravitatoria excéntrica respecto del punto fijo, se ocasiona un movimiento de precesión alrededor del eje vertical paralelo a la acción gravitatoria, con velocidad constante.

Para generalizar este efecto, definamos los vectores siguientes:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_p = \dot{\psi} \mathbf{K} & \text{(velocidad de precesión)} \\ \mathbf{H}_z = (\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = Cr \mathbf{k} & \text{(Momento cinético respecto} \\ & \text{del eje del cuerpo, orientado)} \end{cases}$$

El vector \mathbf{H}_z tiene módulo constante, siendo su ángulo con la dirección fija \mathbf{K} asimismo constante (e igual a θ). Su evolución es una rotación alrededor de \mathbf{k} con velocidad $\boldsymbol{\omega}_p$. Por tanto, aplicando la fórmula de derivación de vectores móviles,

$$\frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{H}_z = \dot{\psi} Cr \sin \theta \mathbf{u}. \quad (8.49)$$

El momento de las fuerzas en O vale

$$\mathbf{M}_O = d\mathbf{k} \wedge (-Mg\mathbf{K}) = Mgd \sin \theta \mathbf{u}. \quad (8.50)$$

Podemos comprobar que, si se sustituye el valor obtenido en (8.48) para la precesión lenta ($\dot{\psi} = Mgd/Cr$) en la ecuación (8.49) se obtiene la identidad de esta última con (8.50):

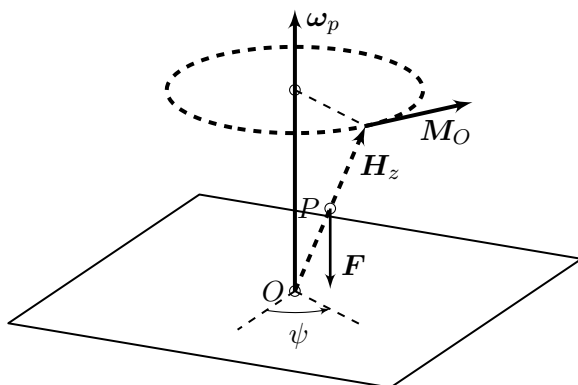
$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_z}{dt} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{H}_z.$$

El resultado anterior se verifica no sólo para el momento originado por el peso, sino en general para una fuerza excéntrica \mathbf{F} cualquiera. Si consideramos esta aplicada en un punto P del eje del sólido definido por \mathbf{r}_{OP} , considerando el eje \mathbf{K} de precesión en la dirección de \mathbf{F} , se verifica igualmente

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \wedge \mathbf{F} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{H}_z$$

Conviene destacar dos características importantes del efecto giroscópico, aparentemente contradictorias con las leyes clásicas de la dinámica, al menos tal y como se formulan para partículas:

Figura 8.14: En el movimiento giroscópico, el vector \mathbf{H}_z que define el eje del giróscopo gira alrededor del eje ω_p , moviéndose en dirección normal a la fuerza aplicada (es decir, paralelamente al momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \wedge \mathbf{F}$).



1. La acción de una fuerza \mathbf{F} sobre el sólido produce un desplazamiento del eje del cuerpo en dirección *perpendicular a \mathbf{F}* , en lugar de según la dirección de \mathbf{F} . En efecto, el movimiento del eje lleva la dirección de $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \wedge \mathbf{F}$.
2. La acción de \mathbf{F} y por consiguiente \mathbf{M}_O produce una *velocidad de precesión*, en lugar de una aceleración, como ocurriría en un cuerpo ordinario según la segunda ley de Newton. Si cesa la acción de \mathbf{M}_O , cesa inmediatamente la velocidad de precesión. Esto significa que los movimientos del eje son mucho más pequeños y su orientación sumamente estable.

Un giróscopo que no esté sometido a momentos —por ejemplo, si está sometido al campo gravitatorio en movimiento libre, en cuyo caso el momento respecto del centro de masas es nulo— mantiene fija la orientación de su eje con una gran exactitud. Tan sólo se produce una variación de la dirección de su eje si se aplica un momento sobre él, precesionando en este caso según la dirección del momento. Similarmente al concepto de «fuerzas de inercia» en dinámica de la partícula, que representa la resistencia a variar la velocidad de la misma, se produce aquí un «*momento giroscópico*» que es la resistencia a variar la orientación del eje del giróscopo.

Este fenómeno es la base de numerosas aplicaciones prácticas. Cabe citar entre ellas la brújula giroscópica. Esta consiste en un giróscopo cuyo eje puede girar libremente alrededor del centro de masas, con la única restricción de obligarle a mantenerse horizontal. En estas condiciones el eje tiende a colocarse orientado hacia el Norte geográfico, con oscilaciones pequeñas alrededor de esta orientación¹⁴. Asimismo, los giróscopos se emplean como

¹⁴Se puede encontrar una descripción más detallada de la brújula giroscópica en: J.A.

sistemas de navegación inercial en aeronaves, misiles balísticos intercontinentales y satélites espaciales.

Por último, un fenómeno interesante basado en el efecto giroscópico es la *precesión de los equinoccios* en el movimiento de la tierra. Es sabido

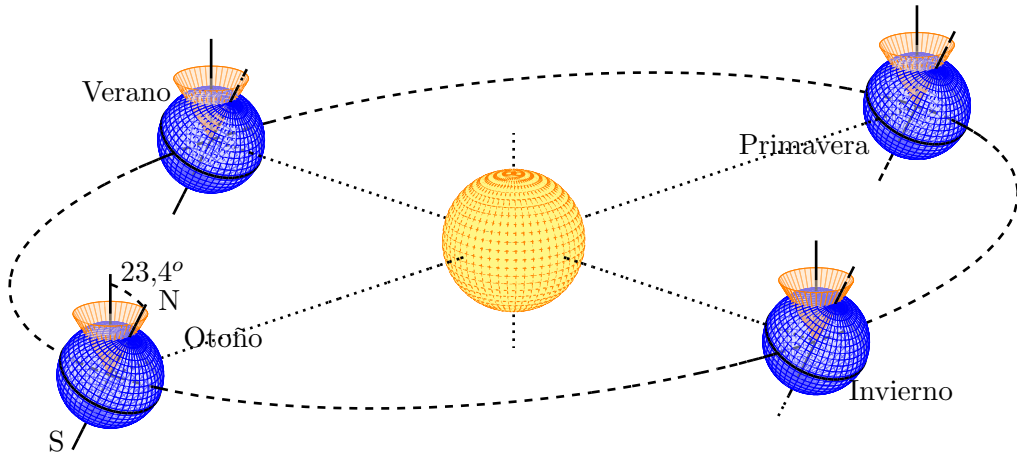


Figura 8.15: *En el movimiento de la tierra alrededor del sol, que se desarrolla sobre el plano de la eclíptica, debido a los momentos originados por la atracción excéntrica del sol y la luna, el eje N-S de rotación de la tierra precesiona muy lentamente alrededor de la perpendicular al plano, originando el fenómeno llamado «precesión de los equinoccios».*

que su trayectoria se produce en el plano de la eclíptica, con una rotación propia alrededor del eje N-S que se halla inclinado respecto a la normal a la eclíptica unos $23,4^\circ$. Esta inclinación produce una incidencia distinta de los rayos solares en distintas fases de la órbita terrestre, siendo la responsable de los equinoccios (primavera y otoño) y los solsticios (verano e invierno). En principio, parece que el eje de la tierra se mantiene constante en dirección, por lo cual los equinoccios ocurrirían siempre en la misma época del año sidéreo. Si la tierra fuera perfectamente esférica y homogénea, esto sería así, ya que la acción gravitatoria del sol y de la luna darían un momento neto nulo respecto del centro de masas de la Tierra, con lo cual no existiría precesión de su eje. Sin embargo la tierra no es una esfera homogénea sino que está achatada, no siendo tampoco perfectamente uniforme, debido a la fuerza centrífuga de la propia rotación terrestre. Así el momento neto

ejercido por la luna y el sol sobre la tierra produce una precesión del eje de giro (N-S) de la tierra alrededor de la normal a la eclíptica, con un periodo aproximado de 26.000 años.

Esto quiere decir que, respecto a direcciones fijas en el firmamento, léase estrellas del zodiaco o galaxias lejanas, la posición de los equinoccios varía a lo largo del tiempo; cada 2000 años aproximadamente se produce un corrimiento de un mes. Así los signos del Zodiaco, asociados con la posición de la tierra alineada en la eclíptica bajo diversas constelaciones en el firmamento celeste que dan su nombre a cada signo, no corresponden a fechas fijas en el calendario de las estaciones. Asimismo, en cada época distintas estrellas hacen el papel de estrella Polar (situada sobre el Norte, en la prolongación del eje N-S).

8.5. Dinámica del sólido en sistemas no inerciales

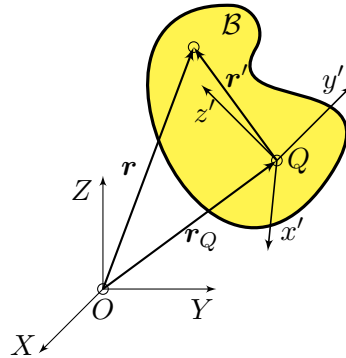
Por último incluiremos en este capítulo un apartado para estudiar de forma general los términos complementarios que se necesita incluir en las ecuaciones de la dinámica del sólido rígido cuando se plantean en sistemas no inerciales.

Las ecuaciones de Euler, tanto en su expresión vectorial (7.66) como en coordenadas (7.67) están desarrolladas en un sistema inercial de referencia¹⁵. Supongamos que se quiere describir el movimiento en relación a un sistema no inercial general $SQ \equiv (Qx'y'z')$, siendo Q un punto material dado del sólido (figura 8.16). Para establecer las ecuaciones de la dinámica será necesario considerar el efecto de las fuerzas de inercia correspondientes.

Sistema ligado a un punto del sólido y orientación arbitraria.— Se plantea en primer lugar el caso más general, en que se desea establecer las ecuaciones del movimiento relativas a un sistema de referencia de orientación arbitraria $SQ \equiv (Qx'y'z')$, que no coincida necesariamente con el triedro del sólido que gira con el mismo ($Qxyz$). Sea Ω la velocidad de rotación del sólido y $\omega \neq \Omega$ la del triedro ($Qx'y'z'$). Sea \mathbf{r} el vector posición genérico medido desde O , \mathbf{r}' el vector posición medido desde Q , y $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{OQ}$ (figura 8.16). La relación entre la aceleración absoluta y la relativa al sistema

¹⁵Se recuerda que aunque las coordenadas se expresen en uno o otro triedro lo relevante a estos efectos es que las derivadas se realicen desde el punto de vista de un observador inercial

Figura 8.16: *Ejes inerciales (Oxyz) y no inerciales (Qx'y'z') para la descripción del movimiento del sólido B, siendo Q un punto material dado del sólido y (x'y'z') direcciones arbitrarias.*



no inercial (SQ) es:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{\ddot{\mathbf{r}}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')}_{\mathbf{a}_{\text{arr}}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{\text{cor}}} + \underbrace{\left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ}}_{\mathbf{a}_{\text{rel}}} \quad (8.51)$$

El movimiento del sólido relativo a (SQ) es una rotación instantánea de velocidad $(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})$, por lo que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{SQ} &= (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{r}' \quad (8.52) \\ \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{SQ} &= \left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})\right)_{SQ} \wedge \mathbf{r}' + (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge [(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{r}'] \end{aligned}$$

Para establecer la ecuación dinámica del movimiento relativo a (SQ) es preciso añadir al momento de las fuerzas exteriores en Q , \mathbf{M}_Q , el momento debido a las fuerzas (ficticias) de inercia originadas por \mathbf{a}_{arr} y \mathbf{a}_{cor} :

$$\mathbf{M}_Q^* = \mathbf{M}_Q - \int_B \mathbf{r}' \wedge (\mathbf{a}_{\text{arr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}}) \rho dV \quad (8.53)$$

El desarrollo de esta expresión requeriría sustituir las expresiones de \mathbf{a}_{arr} a partir de (8.51) y \mathbf{a}_{cor} a partir de (8.51) y (8.52) y puede resultar algo engorroso.

Sistema ligado a un punto del sólido, sin rotación.- Es raro el caso en que sea necesario un planteamiento tan general como el anterior. En la práctica es más común que lo que interese sea el estudio del movimiento del sólido relativo a un punto Q del mismo, de movimiento conocido o impuesto,

sin prescribir necesariamente una velocidad de rotación $\boldsymbol{\omega}$ al triedro. En este caso, tomaremos el triedro de referencia $(Qx'y'z') = (QXYZ)$ con origen en Q y direcciones paralelas al inercial (cumpliendo un papel similar al del “triedro fijo” para el planteamiento de las ecuaciones de Euler), y por otra parte tomaremos el triedro “del cuerpo” $(Qxyz)$ con direcciones materiales fijas, es decir, que rote con el sólido. Será entonces $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, y (8.51) se convierte en:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_Q + \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{SQ},$$

Por lo que el término adicional en (8.53) será únicamente el debido al arrastre de la traslación de Q :

$$- \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}' \wedge \ddot{\mathbf{r}}_Q) \rho dV = - \underbrace{\mathbf{r}'_G}_{=\mathbf{r}_{QG}} \wedge (M \ddot{\mathbf{r}}_Q) \quad (8.54)$$

Resulta finalmente la ecuación:

$$\begin{aligned} M_Q - \mathbf{r}'_G \wedge (M \ddot{\mathbf{r}}_Q) &= \left(\frac{d\mathbf{H}_Q^{SQ}}{dt} \right)_{SQ} \\ &= \mathbf{I}_Q \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \quad (8.55)$$

Nótese que en esta expresión se ha empleado el momento cinético \mathbf{H}_Q^{SQ} con velocidades relativas al sistema (SQ) , para el que es válida la expresión $\mathbf{H}_Q^{SQ} = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega}$. Sin embargo, si se empleasen velocidades “absolutas”, resultaría

$$\mathbf{H}_Q = \mathbf{I}_Q \cdot \boldsymbol{\Omega} + M \mathbf{r}_{QG} \wedge \mathbf{v}_Q.$$

Por otra parte, al igual que en el desarrollo de las ecuaciones de Euler, se ha derivado primero respecto al sistema de referencia $(Qxyz)$, utilizando la propiedad de constancia de \mathbf{I}_Q en relación con este sistema de referencia. El término adicional (8.54) se puede interpretar como el momento en Q de $(-M \ddot{\mathbf{r}}_Q)$ situado en G .

Sistema del Centro de Masas (SCM).- En el caso en que sea $Q \equiv G$, será $\mathbf{r}'_G = \mathbf{r}_{QG} = \mathbf{0}$, por lo que las fuerzas de inercia no dan momento en G , y la ecuación (8.55) es idéntica a la de un punto fijo en un sistema inercial (7.66):

$$M_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

Este resultado lo conocíamos ya, habiéndolo visto al tratar del principio del momento cinético.

Si consideramos el movimiento de un sólido en el campo gravitatorio simplificado, sin otras fuerzas aplicadas ni ligaduras, será entonces posible descomponerlo en:

1. Movimiento del centro de masas G , como si fuera una partícula

$$\mathbf{a}_G = -g\mathbf{k},$$

que da lugar a una trayectoria parabólica.

2. Movimiento relativo a G , con momento nulo (movimiento por inercia), ya que el peso no produce momento respecto del centro de masas:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}_G = \mathbf{I}_G \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_G \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad (8.56)$$

