3. Estática Analítica

MECÁNICA

Grado de Ingeniería Civil

José M.ª Goicolea

Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid

23 de febrero de 2022

POLITÉCNICA

Índice

1. **Concepto**
   - Condiciones
   - Estabilidad
2. **Equilibrio**
   - Partícula
   - Sistema
   - Sólido rígido
3. **Ejercicios**

Índice

1. **Concepto**
   - Condiciones
   - Estabilidad
2. **Equilibrio**
   - Partícula
   - Sistema
   - Sólido rígido
3. **Ejercicios**

Concepto

Definición:

Se dice que un sistema material está en equilibrio cuando todas sus partículas se encuentran en reposo, y permanecen en el mismo estado de reposo.

- Para un sistema de partículas $(m_i, i = 1, \ldots N)$ las condiciones de equilibrio serían

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{0}\,,\;\; \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{0} \quad \forall i = 1, \ldots N$$

- Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton $\boldsymbol{F}_i = m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$, las condiciones se pueden expresar como

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{0} & \text{cond. iniciales} \\ \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} & \text{cond. equilibrio} \end{cases} \quad \forall i = 1, \ldots N \tag{1}$$

- (La aplicación de estas condiciones sería complicada para un sistema con numerosas partículas)

Concepto

- En un sistema definido por coordenadas generalizadas $(q_j, j = 1, \ldots n)$, las condiciones se traducen en que estas sean constantes y permanezcan constantes:

$$\dot{q}_j = 0; \quad \ddot{q}_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \quad \text{(condición de equilibrio)} \tag{2}$$

- Para establecer la condición equivalente para las fuerzas, partimos de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{3}$$

- Desarrollando las ecuaciones, es fácil comprobar que la condición para $\ddot{q}_j = 0$ es

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{\mathsf{nc}} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)}$$

Concepto

- En el caso en que las fuerzas provengan de un potencial $(Q_i = -\partial V/\partial q_i)$, la condición de equilibrio (4) equivale a que adopte un valor estacionario en la posición de equilibrio:

$$\boxed{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q_i=0} = 0 \qquad (i = 1, \dots n)} \tag{5}$$

Concepto

Tipos de problemas

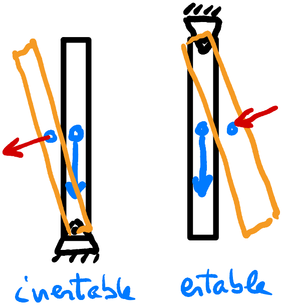
1. Para un sistema sometido a fuerzas dadas, establecer la existencia de una o más posibles configuraciones de equilibrio y determinar éstas.
2. Analizar la estabilidad de las posiciones de equilibrio. El concepto de estabilidad consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo a dicha configuración, o si por el contrario se aleja indefinidamente de la misma.
3. Para un sistema en una configuración geométrica determinada, determinar las acciones necesarias (tanto en lo que respecta a fuerzas activas como a reacciones) para el equilibrio y su estabilidad.

Índice

1. **Concepto**
   - Condiciones
   - Estabilidad
2. **Equilibrio**
   - Partícula
   - Sistema
   - Sólido rígido
3. **Ejercicios**

Estabilidad

- Suponemos que la posición de equilibrio corresponde a $\{q_i = 0\}$
- Una perturbación del equilibrio en las coordenadas o velocidades iniciales $\{q_i \neq 0, \dot{q}_i \neq 0\}$, dará lugar a una evolución dinámica del sistema, en la que la configuración varía respecto de la posición de equilibrio.
- Se dice que el equilibrio es estable cuando la variación respecto de la posición de equilibrio está acotada, llegando a ser tan pequeña como queramos al hacer la perturbación suficientemente pequeña.

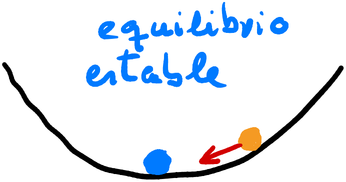


Estabilidad

- Diremos que el equilibrio es estable si para un valor ϵ tan pequeño como se desee es posible encontrar un valor δ de forma que:

$$\forall \epsilon, \ \exists \delta \quad \text{tal que} \quad |q_{0i}| < \delta, \quad |\dot{q}_{0i}| < \delta \quad \Rightarrow \quad |q_i| < \epsilon$$

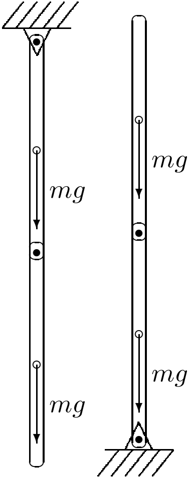
- En este caso lo que ocurre es que las fuerzas que se originan en esta perturbación tienden a devolver al sistema a su posición de equilibrio.

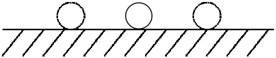


- El equilibrio es inestable cuando la configuración del sistema no está acotada, aún para una perturbación pequeña, perdiéndose por tanto la posición de equilibrio. Las fuerzas tienden a separar el sistema de su posición de equilibrio.

- Por último, cabe hablar también de equilibrio indiferente, referido a perturbaciones en que se alteran tan sólo las coordenadas, pero no las velocidades. En este caso las nuevas posiciones, cercanas a la posición original de equilibrio siguen siendo de equilibrio.

Estabilidad





Ejemplos de equilibrio estable, inestable e indiferente.

Estabilidad – Teorema Lejeune-Dirichlet

- Sea un sistema en que las fuerzas provienen de un potencial estacionario V: $Q_i = -\partial V/\partial q_i$. En el equilibrio el potencial debe ser estacionario, $\partial V/\partial q_i = 0$.

Teorema

Si el potencial V es mínimo en la posición de equilibrio, este es estable

Demostración

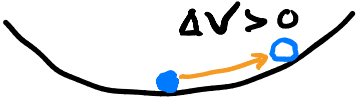
- Si en la posición de equilibrio $V|_0 = 0$ es un mínimo local, al separarse ligeramente del mismo para una perturbación pequeña, será $V > 0$.
- Por otra parte la energía cinética también se anula en la posición de equilibrio y por su carácter esencialmente positivo $T > 0$.
- Al conservarse la energía $T + V = \epsilon$, esto indica que ambos deben estar acotados:

$$T + V = \epsilon > 0, \quad T > 0, V > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T < \epsilon, V < \epsilon}$$

Estabilidad – Teorema Lejeune-Dirichlet

- La variación del potencial respecto de la posición de equilibrio es por tanto, a partir del desarrollo en serie de V:

$$\Delta V = V(\mathbf{q}) - V(\mathbf{0}) = \cancel{\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0} q_i + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 q_i q_j + \ldots \qquad (6)$$

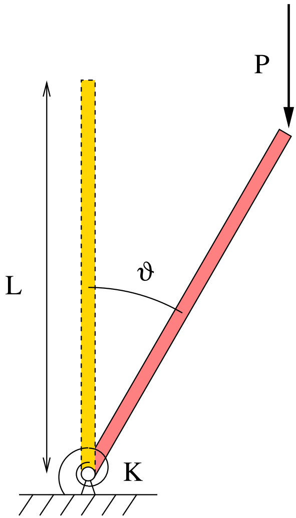


- La matriz de las derivadas segundas debe ser definida positiva[1]:

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a}\}^{\mathsf{T}} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right] \{\mathbf{a}\} > 0 \quad \forall \{\mathbf{a}\} \neq \{\mathbf{0}\}} \qquad (7)$$

[1] Para que una matriz sea definida positiva deben ser positivos todos los menores principales, o alternativamente todos los autovalores

Ejemplo: columna rígida con empotramiento flexible



$$V(\vartheta) = -PL(1-\cos\vartheta) + \frac{1}{2}K\vartheta^2$$

$$\delta V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\vartheta}\delta\vartheta = 0 \quad \forall\delta\vartheta$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\vartheta} = -PL\operatorname{sen}\vartheta + K\vartheta = 0}$$

$\vartheta = 0$: equilibrio

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\vartheta^2} = -PL\cos\vartheta + K > 0$$

estabilidad para $\theta = 0$:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\vartheta^2}\right|_0 = K - PL > 0}$$

Si $K \leq PL$ inestabilidad (pandeo)

Índice

1 Concepto
- Condiciones
- Estabilidad

2 Equilibrio
- Partícula
- Sistema
- Sólido rígido

3 Ejercicios

Equilibrio – Partícula

- Para una partícula libre, la condición de equilibrio es

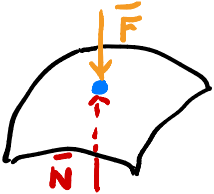
$$\boldsymbol{F} = \mathbf{0} \tag{8}$$

donde $\boldsymbol{F}$ es la resultante de todas las fuerzas.

- En el caso conservativo se formula como

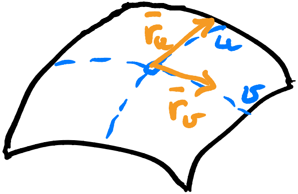
$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} = \mathbf{0} \tag{9}$$

- Para una partícula ligada a una superficie lisa, las fuerzas externas $\boldsymbol{F}$ deben ser normales a la superficie, equilibradas por la reacción $\boldsymbol{N}$:



- Empleando la definición paramétrica de la superficie (u, v), la condición equivale a que sea normal a dos vectores tangentes, $\partial \boldsymbol{r}/\partial u = \boldsymbol{r}_u$ y $\partial \boldsymbol{r}/\partial v = \boldsymbol{r}_v$:

$$\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = 0, \quad \boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = 0 \qquad (10)$$



- En el caso en que $\boldsymbol{F}$ provenga de un potencial, (10) equivale a:

$$\frac{\partial V(u,v)}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = 0\,; \quad \frac{\partial V(u,v)}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = 0$$

- La estabilidad del equilibrio se formula mediante:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial v \partial u} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial v^2} \end{pmatrix} > 0$$

Índice

1. Concepto
   - Condiciones
   - Estabilidad
2. Equilibrio
   - Partícula
   - Sistema
   - Sólido rígido
3. Ejercicios

Equilibrio – Sistema

- El equilibrio del mismo requiere el de cada una de sus partículas:

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{int}} = \boldsymbol{0} \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{11}$$

- Las ecuaciones cardinales de la estática provienen de sumar las ecuaciones (11) para todo el sistema, $\sum_{i=1}^{N}$. Constituyen un conjunto necesario de condiciones:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{0}} \tag{12}$$

$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} = \boldsymbol{0}} \tag{13}$$

- Sin embargo, sólo son ecuaciones suficientes para el caso de un sólido rígido

Equilibrio – Sistema

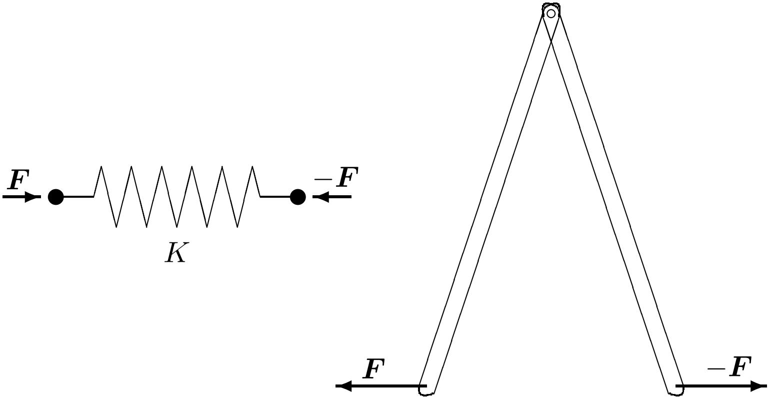


Figura: *Dos sistemas en los que las fuerzas actuantes tienen resultante y momento nulos (ecuaciones cardinales), y sin embargo no están en equilibrio.*

Índice

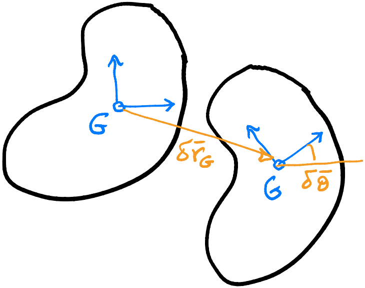
1 Concepto
- Condiciones
- Estabilidad

2 Equilibrio
- Partícula
- Sistema
- Sólido rígido

3 Ejercicios

- En un sólido rígido, los desplazamientos virtuales de cualquier punto pueden expresarse a partir de $\{\delta\boldsymbol{r}_G, \delta\boldsymbol{\theta}\}$:

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{r}_G + \delta\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{r}$$



- El trabajo virtual se expresa como

$$\begin{aligned}\delta W &= \boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{M}_G \cdot \delta\boldsymbol{\theta} \\ &= 0 \quad \forall\{\delta\boldsymbol{r}_G, \delta\boldsymbol{\theta}\}\end{aligned}$$

- Se deducen las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}\,; \quad \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{0}$$

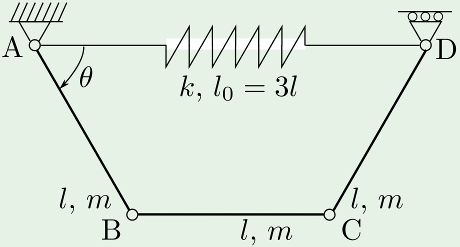
- Para el sólido con un punto fijo O las condiciones son

$$\delta W = \boldsymbol{M}_O \cdot \delta\boldsymbol{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$$

Ejercicios

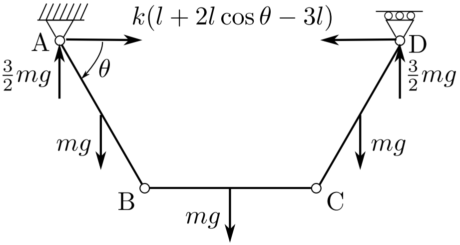
Enunciado

El dispositivo de la figura adjunta está formado por tres barras pesadas articuladas entre sí, de longitud l y masa m cada una, de forma que están contenidas en un mismo plano vertical. El conjunto se haya sujeto por el vértice A a un punto fijo y por el vértice D a un punto que impide el movimiento vertical.



Asimismo, entre los vértices A y D se sitúa un resorte lineal de longitud natural $l_0 = 3l$ y constante k.

1. Calcular el valor de k para que el sistema esté en equilibrio para $\theta = 60^\circ$
2. Determinar si es un punto de equilibrio estable o inestable.



§1.— La posición natural del resorte sería para $\theta = 0$; al descender las barras el resorte se acorta $(2l\cos\theta - 2l < 0)$. Por equilibrio de momentos, establecemos la condición de rótula en C, con las fuerzas en CD:

$$-k(2l\cos\theta - 2l)l\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{3}{2}mgl\cos\theta + gm\frac{l}{2}\cos\theta = 0 \qquad (14)$$

obteniéndose el valor de k igual a:

$$k = -\frac{mg\cos\theta}{2l(\cos\theta - 1)\,\mathrm{sen}\,\theta} \qquad (15)$$

Si particularizamos para $\theta = 60^\circ$ obtenemos el valor $k = mg/(\sqrt{3}l)$.

Ejercicios - Solución

Al mismo resultado llegamos aplicando consideraciones analíticas. La función potencial del sistema vale:

$$V = -2mgl\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k(2l\cos\theta - 2l)^2 \tag{16}$$

donde hemos tomado como nivel de referencia del potencial gravitatorio la horizontal por A. La condición de equilibrio se obtiene anulando la derivada de V:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad -2lmg\cos\theta - k(2l\cos\theta - 2l)2l\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \tag{17}$$

obteniendo el valor de k:

$$k = -\frac{mg\cos\theta}{2l(\cos\theta - 1)\,\mathrm{sen}\,\theta} \tag{18}$$

que es el mismo valor que la expresión dada en (15).

Ejercicios - Solución

§2.— Determinemos ahora si el punto de equilibrio es estable o inestable. La derivada segunda del potencial es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} = 2lmg\,\mathrm{sen}\,\theta + k2l\,\mathrm{sen}\,\theta 2l\,\mathrm{sen}\,\theta - k(2l\cos\theta - 2l)2l\cos\theta \tag{19}$$

Si particularizamos para las condiciones de equilibrio $\theta = 60^\circ$ y $k = mg/(\sqrt{3}l)$ obtenemos

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=60,\, k=\frac{mg}{\sqrt{3}l}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}mgl > 0 \tag{20}$$

lo que demuestra que el punto de equilibrio obtenido es estable.