

T7: Ecuaciones de la Dinámica del Sólido Rígido

MECÁNICA – Grado de Ingeniería Civil

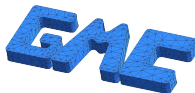
José M.^a Goicolea

*Grupo de Mecánica Computacional
Escuela de Ingenieros de Caminos,
Universidad Politécnica de Madrid*

30 de marzo de 2022



POLITÉCNICA



1 Concepto y ecuaciones generales

- Sólido Rígido
- Ecuaciones Cardinales

2 Magnitudes cinéticas

- Expresiones generales
- Rotación con eje fijo

3 Tensor de inercia

- Concepto y expresiones
- Componentes
- Ejes principales y simetrías
- Campo tensorial

4 Ecuaciones de la dinámica

- Ecuaciones de Euler
- Ecuaciones de Lagrange
- Reacciones

Parte I

Clase T7-1: Concepto, ecuaciones generales y expresión de magnitudes cinéticas

1 Concepto y ecuaciones generales

- Sólido Rígido
- Ecuaciones Cardinales

2 Magnitudes cinéticas

- Expresiones generales
- Rotación con eje fijo

1 Concepto y ecuaciones generales

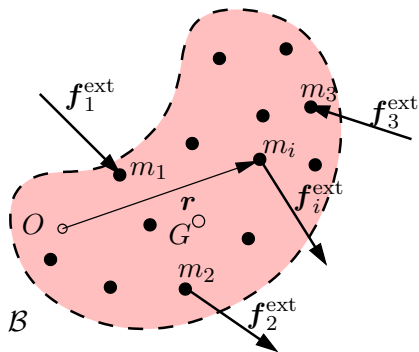
- Sólido Rígido
- Ecuaciones Cardinales

2 Magnitudes cinéticas

- Expresiones generales
- Rotación con eje fijo

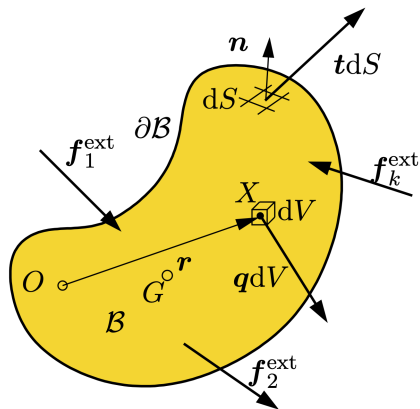
Sólido Rígido – Concepto

Conjunto de partículas, finito o infinito, cuyas distancias se mantienen constantes



Sólido rígido discreto, formado por partículas de masas m_i

$$\text{Masa total: } M = \sum_{i=1} m_i$$



Sólido rígido como medio continuo, con masas elementales $dm = \rho dV$

$$\text{Masa total: } M = \int_B \rho dV$$



Sólido Rígido – Magnitudes dinámicas

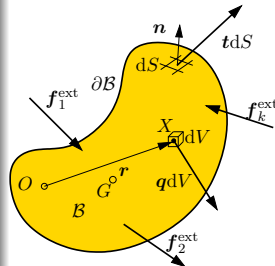
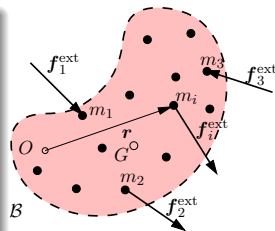
Resultante de fuerzas y momentos

- Sólido discreto

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^{\text{ext}}, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{f}_i^{\text{ext}}. \quad (1)$$

- Sólido continuo

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_B \mathbf{q} \, dV + \int_{\partial B} \mathbf{t} \, dS + \sum_k \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \\ \mathbf{M}_O &= \int_B \mathbf{r} \wedge \mathbf{q} \, dV + \int_{\partial B} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t} \, dS \\ &\quad + \sum_k \mathbf{r}_k \wedge \mathbf{f}_k^{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (2)$$



1 Concepto y ecuaciones generales

- Sólido Rígido
- Ecuaciones Cardinales

2 Magnitudes cinéticas

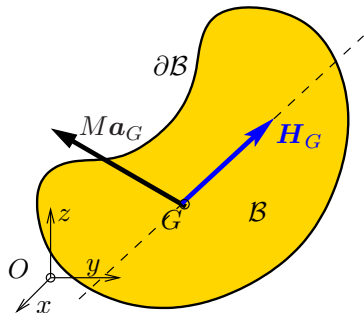
- Expresiones generales
- Rotación con eje fijo

Ecuaciones Cardinales – 1

- En el caso más general (3D) un sólido rígido tiene 6 grados de libertad
 - 3 gdl de traslación: coordenadas (x, y, z) de un punto de referencia; este puede ser (preferentemente) el CDM G , u otro punto
 - 3 gdl de rotación: por ejemplo, los ángulos de Euler (ψ, θ, φ)
- Se pueden aplicar las 6 ecuaciones cardinales de la dinámica

$$\begin{cases} \mathbf{F} = M\mathbf{a}_G; \\ \mathbf{M}_G = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_G \end{cases}$$

(3)



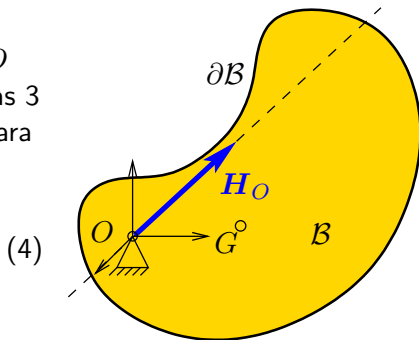
Constituyen un conjunto necesario y suficiente¹ para resolver la dinámica

¹se demuestra mediante el principio de D'Alembert,
 $(\mathbf{F} - M\mathbf{a}_G) \cdot \delta \mathbf{r}_G + (\mathbf{M}_G - \frac{d}{dt}\mathbf{H}_G) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad \forall (\delta \mathbf{r}_G, \delta \boldsymbol{\theta})$

Ecuaciones Cardinales – 2

- En el caso del sólido con un punto O fijo, tiene solo 3 gdl de rotación, y las 3 ecuaciones necesarias y suficientes para la dinámica son

$$M_O = \frac{d}{dt} H_O$$



Constituyen un conjunto necesario y suficiente² para resolver la dinámica

²se demuestra mediante el principio de D'Alembert, $(M_G - \frac{d}{dt} H_G) \cdot \delta\theta = 0 \quad \forall \delta\theta$

1 Concepto y ecuaciones generales

- Sólido Rígido
- Ecuaciones Cardinales

2 Magnitudes cinéticas

- Expresiones generales
- Rotación con eje fijo

Expresiones generales – Magnitudes cinéticas

Cantidad de movimiento y momento cinético

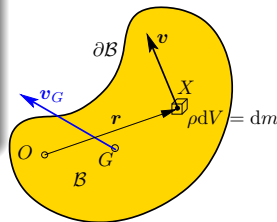
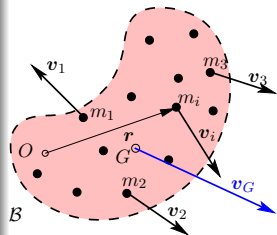
- Sólido discreto

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i, \quad (5)$$

- Sólido continuo

$$\mathbf{P} = \int_B \mathbf{v} \rho dV = M \mathbf{v}_G, \quad \mathbf{H}_O = \int_B \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \rho dV. \quad (6)$$

- En lo que sigue, supondremos que se trata de un sólido continuo, aunque todos los resultados son igualmente válidos para el caso discreto.



Expresiones generales – Momento cinético

- Supondremos igualmente que el movimiento de **traslación y el de rotación están desacoplados**.
- El movimiento de traslación se resuelve en este caso como la dinámica de una partícula.
- Nos fijaremos en lo que sigue únicamente en el **movimiento de rotación**, tanto para un sólido libre (alrededor de G) como para un sólido con un punto fijo (alrededor de O), la ecuación vectorial sería

$$M_G = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_G \quad \text{o bien} \quad M_O = \frac{d}{dt} \mathbf{H}_O \quad (7)$$

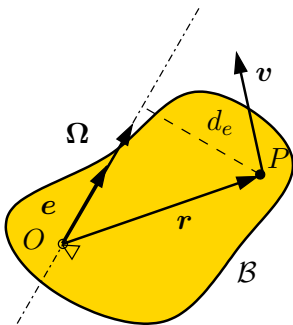
- La magnitud fundamental es el **momento cinético** ($\mathbf{H}_G$ ó $\mathbf{H}_O$). Por ello, en lo que sigue se desarrolla su expresión para un movimiento de rotación instantánea³, a partir de un punto de velocidad nula, $\mathbf{H}_O$.

³Los resultados son idénticos en el caso de un movimiento general para $\mathbf{H}_G$

Expresiones generales – Momento cinético

- Consideramos el movimiento de rotación siendo O un punto con velocidad nula, perteneciente al eje de rotación⁴. El campo de velocidades es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} \quad (8)$$



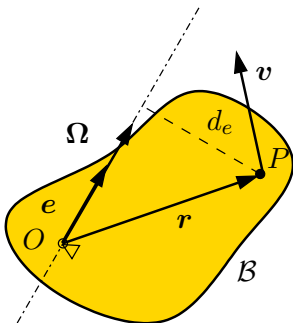
- El momento cinético, desarrollando la ecuación (6), es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O &= \int_B \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \rho dV \\ &= \int_B \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV \\ &= \int_B [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV \end{aligned} \quad (9)$$

⁴El caso del movimiento general del sólido libre es idéntico, empleando el CDM Gy y las velocidades relativas a este punto

Expresiones generales – Momento cinético

- La expresión del momento cinético se puede proyectar sobre la dirección e del eje de rotación, obteniendo el **momento cinético áxico**



$$\begin{aligned} H_{O,e} &= e \cdot H_O \\ &= \int_B e \cdot [r \wedge (\Omega \wedge r)] \rho dV \\ &= \int_B \Omega (e \wedge r) \cdot (e \wedge r) \rho dV \\ &= \Omega \int_B d_e^2 \rho dV \end{aligned} \quad (10)$$

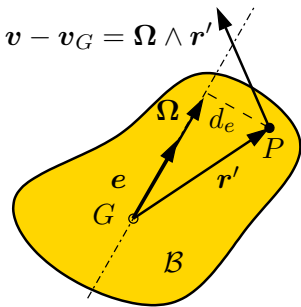
- Donde aparece el **momento de inercia** del sólido respecto al eje (O, e) :

$$I_{O,e} \stackrel{\text{def}}{=} \int_B d_e^2 \rho dV \quad \longrightarrow \quad \boxed{H_{O,e} = I_{O,e} \Omega} \quad (11)$$

Expresiones generales – Energía cinética

- De igual manera que para el momento cinético, la expresión de la energía cinética para una **rotación instantánea** resulta

$$T = \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \rho dV = \frac{1}{2} \Omega^2 \int_B d_e^2 \rho dV \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_{O,e} \Omega^2} \quad (12)$$



- Para un **movimiento general**, desarrollando a partir del CDM G , la expresión es^a

$$T = \int_B \frac{1}{2} (\mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 \rho dV \quad (13)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{G,e} \Omega^2} \quad (14)$$

- que es la aplicación del teorema de König al caso del sólido, separando la energía de traslación y rotación.

^ademostración en el libro de texto

1 Concepto y ecuaciones generales

- Sólido Rígido
- Ecuaciones Cardinales

2 Magnitudes cinéticas

- Expresiones generales
- Rotación con eje fijo

Rotación con eje fijo

- Consideramos la dinámica de rotación para el caso en que además de ser una rotación instantánea, el **eje de rotación e es fijo**
- Para ello se deriva la expresión⁵(11)

$$\frac{d}{dt}H_{O,e} = I_{O,e} \dot{\Omega} = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O \cdot \mathbf{e}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{H}_O) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e} = M_{O,e}$$

$\Downarrow$

$M_{O,e} = I_{O,e} \dot{\Omega}$

(15)

- La ecuación obtenida es similar a la ecuación dinámica de la partícula, $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$. Sin embargo, solo vale para el caso de eje de rotación fijo, como en la dinámica del sólido 2D.
- Para un **caso general 3D** es necesario desarrollar las expresiones a partir del **tensor de inercia**, en los siguientes apartados.

⁵Si la dirección del eje e no fuera constante habría que derivarlo también lo que invalidaría este resultado

Parte II

Clase T7-2: Tensor de inercia: concepto, componentes, propiedades y ejemplos

3 Tensor de inercia

- Concepto y expresiones
- Componentes
- Ejes principales y simetrías
- Campo tensorial

Tensor de inercia – Momento cinético

- La expresión obtenida en (9) indica que el momento cinético $\mathbf{H}_O$ depende linealmente de $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{H}_O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r}] \rho dV \quad (16)$$

- Esta naturaleza como aplicación lineal de un vector $\boldsymbol{\Omega}$ a otro vector $\mathbf{H}_O$ lo caracteriza como tensor de orden 2, que denominamos **Tensor de inercia** $\mathbf{I}_O$:

$$\mathbf{I}_O : \boldsymbol{\Omega} \mapsto \mathbf{H}_O(\boldsymbol{\Omega}) \quad (17)$$

- La ecuación (16) también podemos expresarla en componentes⁶:

$$H_{O,i} = \int_{\mathcal{B}} [r^2 \Omega_i - (r_j \Omega_j) r_i] \rho dV \quad (18)$$

⁶se emplea el convenio de sumatorio implícito para índices repetidos

Tensor de inercia – Concepto y expresiones

- En (18) se puede sacar fuera de la integral la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} \equiv \Omega_i$, que es común al sólido. Considerando además $\Omega_i = \delta_{ij}\Omega_j$:

$$H_{O,i} = \left[\int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} \Omega_j - r_j r_i \Omega_j) \rho dV \right] \quad (19)$$

$$= \left[\int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV \right] \Omega_j \quad (20)$$

- En esta expresión se identifican las componentes del tensor de inercia, y la expresión tensorial asociada:

$$I_{O,ij} = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV \Leftrightarrow \mathbf{I}_O = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho dV \quad (21)$$

- El tensor de inercia opera de la siguiente forma (expr. con índices):

$$H_{O,i} = I_{O,ij} \Omega_j \quad (22)$$

- Y equivalentemente en expresión tensorial y matricial

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \{\mathbf{H}_O\} = [\mathbf{I}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (23)$$

Tensor de inercia – Concepto y expresiones

- La expresión del momento cinético áxico puede obtenerse mediante el tensor de inercia; en efecto, para $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}$,

$$H_{O,e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}_O = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}) = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}) \Omega \quad (24)$$

- y comparando con la ecuación (11) se puede identificar

$$\boxed{I_{O,e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{e}} \quad (25)$$

- De forma similar, para una **rotación instantánea** la energía cinética (12) puede expresarse como

$$\begin{aligned} T &= \int_B \frac{1}{2} (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 \rho dV = \int_B \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot [\mathbf{r} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r})] \rho dV \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot \left[\int_B \mathbf{r} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \rho dV \right] = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega} \end{aligned} \quad (26)$$

- Es decir, las expresiones con índices, tensorial y matricial de T son

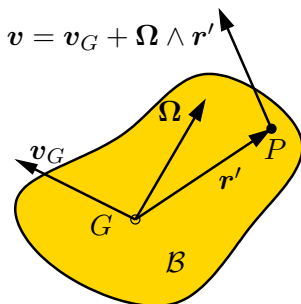
$$\boxed{T = \frac{1}{2} \Omega_i I_{O,ij} \Omega_j}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{I}_O \cdot \mathbf{\Omega}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} (\mathbf{\Omega}) [\mathbf{I}_O] \{\mathbf{\Omega}\}}$$



Tensor de inercia – Concepto y expresiones



- Para el caso de un movimiento general, desarrollando la ecuación del teorema de König (14), la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{I}_G \cdot \mathbf{\Omega} \quad (28)$$

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{\Omega}) [\mathbf{I}_G] \{\mathbf{\Omega}\} \quad (29)$$

3 Tensor de inercia

- Concepto y expresiones
- Componentes
- Ejes principales y simetrías
- Campo tensorial

Tensor de inercia – Componentes

- La expresión en **componentes del tensor de inercia**, obtenida antes en (21), es

$$I_{O,ij} = \int_{\mathcal{B}} (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \rho dV \quad (30)$$

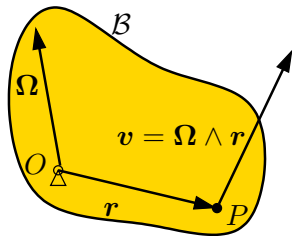
- lo que equivale a la matriz de componentes

$$[\mathbf{I}_O] = \int_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} r_2^2 + r_3^2 & -r_1 r_2 & -r_1 r_3 \\ -r_1 r_2 & r_1^2 + r_3^2 & -r_2 r_3 \\ -r_1 r_3 & -r_2 r_3 & r_1^2 + r_2^2 \end{pmatrix} \rho dV \quad (31)$$

o bien, llamando a las coordenadas (x, y, z)

$$[\mathbf{I}_O] = \int_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho dV \quad (32)$$

Movimiento del sólido $\mathcal{B}$ con un punto fijo O , dotado de velocidad de rotación Ω :



Tensor de inercia – Componentes

- Las componentes del tensor de inercia en coordenadas (x, y, z) pueden identificarse como

$$\begin{aligned} [I_O] &= \int_B \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \rho dV \\ &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

- Los elementos de la **diagonal** son los **momentos de inercia** respecto a los ejes coordenados,

$$I_{xx} = \int_B (y^2 + z^2) \rho dV, \text{ e igual para } I_{yy}, I_{zz} \quad (34)$$

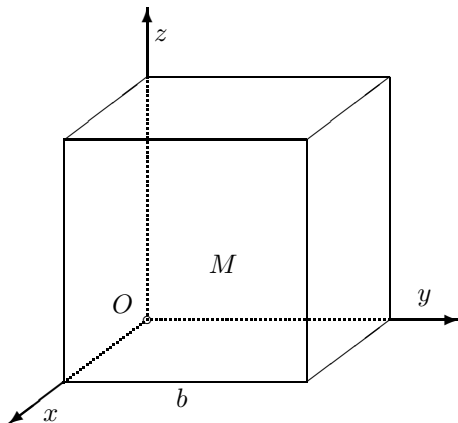
- y **fuera de la diagonal** los **productos de inercia** (con signo $-$),

$$P_{xy} = \int_B xy \rho dV, \text{ e igual para } P_{xz}, P_{yz} \quad (35)$$

Tensor de inercia – Componentes

Ejemplo 7.1, aptdo. 7.3.5 libro texto:

Cubo de masa M y lado b .



$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}Mb^2$$

$$P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = \frac{1}{4}Mb^2$$

$$[I_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Tensor de inercia – Componentes

- El tensor I_O es un operador intrínseco, que no depende de las coordenadas elegidas. Sin embargo, sus componentes $I_{O,ij}$ y la matriz $[I_O]$ **dependen del sistema de coordenadas**.
- Se considera la base espacial fija $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ y la base del cuerpo móvil $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, relacionadas por la matriz de **rotación** $[\mathbf{R}]$

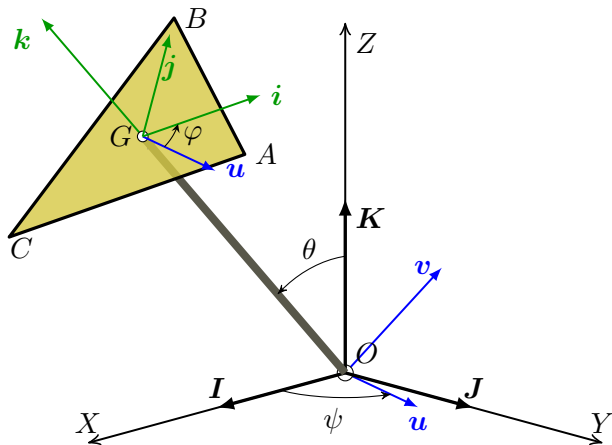
$$(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})[\mathbf{R}] \quad (37)$$

- Suponiendo conocida la matriz de componentes del tensor de inercia en el triedro del cuerpo $[I_O]^0$, la matriz en el triedro fijo $[I_O]$ se obtiene como

$$[I_O] = [\mathbf{R}][I_O]^0[\mathbf{R}]^T \quad (38)$$

- Las componentes $[I_O]^0$ en el triedro del cuerpo son constantes, mientras que las componentes $[I_O]$ en el triedro espacial fijo varían en función de la rotación del cuerpo. Por tanto, por simplicidad, interesará plantear las **expresiones dinámicas en el triedro del cuerpo**.

Tensor de inercia – Sistemas de referencia



- Triedro del cuerpo:
 $\{i, j, k\} \rightarrow [I_O]^0$ constante
- Triedro fijo:
 $\{I, J, K\} \rightarrow [I_O] = [R][I_O]^0[R]^T$

Tensor de inercia – Componentes

Propiedades del tensor de inercia

- La **traza del tensor es invariante** (respecto al sistema de coordenadas):

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{I}_O) &= I_{O,pp} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} \\ &= \int_{\mathcal{B}} (y^2 + z^2) \rho \, dV + \int_{\mathcal{B}} (x^2 + z^2) \rho \, dV + \int_{\mathcal{B}} (x^2 + y^2) \rho \, dV \\ &= \int_{\mathcal{B}} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2) \rho \, dV = 2 \int_{\mathcal{B}} r^2 \rho \, dV\end{aligned}\tag{39}$$

- Propiedad triangular:** cada momento de inercia es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. P.ej. para I_{xx} ,

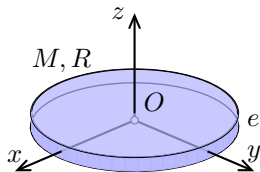
$$\begin{aligned}I_{xx} &< I_{yy} + I_{zz} = \int_{\mathcal{B}} (y^2 + z^2 + 2x^2) \rho \, dV \\ I_{xx} &> I_{yy} - I_{zz} = \int_{\mathcal{B}} (-y^2 + z^2) \rho \, dV\end{aligned}\tag{40}$$

Tensor de inercia – Sólidos planos

- Para el caso de un sólido plano, con espesor despreciable en relación con las demás dimensiones $e \approx 0$, la suma de los momentos de inercia para los ejes en el plano (x, y) es igual⁷ al momento de inercia del eje perpendicular al plano (z).

$$\begin{aligned} I_{xx} + I_{yy} &= \int_B [(y^2 + z^2) + (x^2 + z^2)] \rho dV \\ &= \int_B [x^2 + y^2 + \cancel{2z^2}] \rho dV = I_{zz} \end{aligned} \quad (41)$$

- Ejemplo: disco circular de masa M y radio R , con espesor $e \ll R$



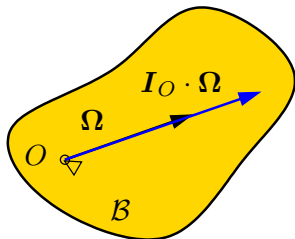
$$\begin{aligned} I_{xx} &= I_{yy} = \frac{1}{4}MR^2 \\ I_{zz} &= I_{xx} + I_{yy} = \frac{1}{2}MR^2 \end{aligned} \quad (42)$$

⁷al ser un sólido degenerado, la propiedad triangular se cumple aquí con el signo =

3 Tensor de inercia

- Concepto y expresiones
- Componentes
- Ejes principales y simetrías
- Campo tensorial

Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías



- Buscamos direcciones de Ω para las que $H_O(\Omega)$ es paralelo a Ω :

$$H_O(\Omega) = I_O \cdot \Omega = \lambda \Omega \quad (43)$$

- Esto solo ocurre para algunas direcciones privilegiadas denominadas **ejes principales de inercia**. Son ejes materiales, ligados al cuerpo y que por tanto se mueven con el mismo.
- Se trata de un **problema de autovalores**: determinar (λ, e) tales que

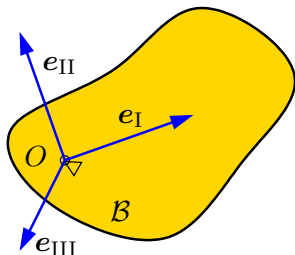
$$I_O \cdot e = \lambda e \quad \Leftrightarrow \quad (I_O - \lambda \mathbf{1}) \cdot e = 0 \quad (44)$$

- Para que haya soluciones distintas de la trivial⁸ la matriz de coeficientes debe ser singular:

$$\det(I_O - \lambda \mathbf{1}) = P(\lambda) = 0 \quad (\text{polinomio característico, cúbico}) \quad (45)$$

⁸siempre existe la solución trivial $e = 0$

Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías



- Las soluciones de $P(\lambda) = 0$ son los autovalores. Al ser I_O simétrico y definido positivo, hay tres soluciones reales y positivas (A, B, C) , **momentos principales de inercia**, asociados a **direcciones principales** (e_I, e_{II}, e_{III}):

$$I_O \cdot e_I = A e_I$$

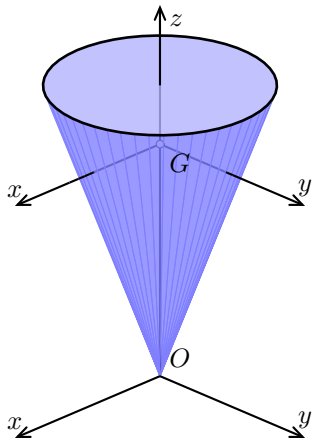
$$I_O \cdot e_{II} = B e_{II} \quad (46)$$

$$I_O \cdot e_{III} = C e_{III}$$

- Si los autovalores son diferentes ($A \neq B \neq C$) las tres direcciones principales (e_I, e_{II}, e_{III}) son mutuamente ortogonales y forman un triedro ortogonal, el **triedro principal de inercia**.
- La expresión del tensor de inercia en el triedro principal es diagonal,

$$[I_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (47)$$

Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías

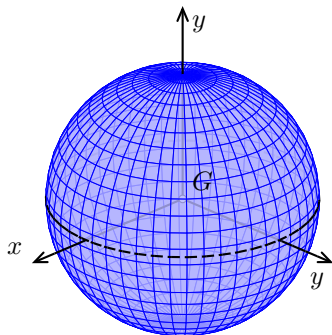


- En el caso en que dos de los momentos principales sean iguales, p.ej. $A = B$, estamos ante un **tensor de inercia cilíndrico**:

$$[I_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (48)$$

- En este caso, todas las direcciones del plano normal a e_{III} son principales y asociadas al mismo momento principal A
- Por ejemplo, en el cono de la figura, que tiene simetría de revolución alrededor de Oz , esta dirección es principal ($e_{III} = \mathbf{k}$). Todos los ejes en el plano xy son principales, tanto en su vértice O como en el CDM G , y sus momentos de inercia son iguales.

Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías



- Si los tres momentos principales son iguales, $A = B = C$, estamos ante un **tensor de inercia esférico**:

$$[I_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \quad (49)$$

- En este caso, todas las direcciones del espacio son principales y asociadas al mismo momento principal A
- Ejemplos de tensores de inercia esféricos son la esfera y el cubo o hexaedro regular. El momento de inercia respecto a cualquier eje que pase por el centro G es el mismo.

Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías

- Como se vio en la ecuación (25) el momento de inercia para un punto dado O depende de la dirección e del eje⁹

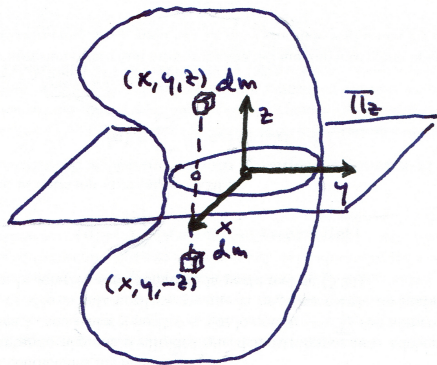
$$I_{O,e} = e \cdot I_O \cdot e \quad (50)$$

- Para todos las posibles direcciones e las direcciones principales son las que proporcionan los **máximos y mínimos momentos de inercia**¹⁰.

⁹En concreto se trata de una forma cuadrática definida positiva

¹⁰Una corresponderá al máximo, otra al mínimo, y la tercera será un máximo o mínimo local intermedio

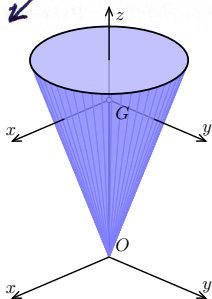
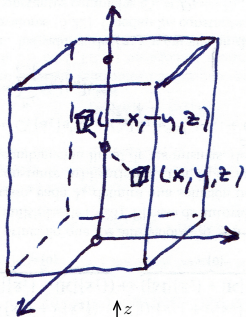
Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías



Si un cuerpo tiene un **plano de simetría**, la dirección normal a dicho plano será siempre eje principal. En efecto, la definición de un plano Π_z de simetría es que para cada punto existe uno simétrico respecto del plano:

$\forall (x, y, z) \in \mathcal{B} \quad \exists (x, y, -z) \in \mathcal{B}$. Por ello se anulan las integrales de los productos de inercia $P_{xz} = P_{yz} = 0$ y el eje es principal (**ejercicio: demostrar**).

Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías



- Si un cuerpo tiene un **eje de simetría**, la dirección de dicho eje siempre será principal. En efecto, la definición de un eje z de simetría es que para cada punto existe uno simétrico respecto del eje:
 $\forall (x, y, z) \in \mathcal{B} \quad \exists (-x, -y, z) \in \mathcal{B}$. Por ello se anulan las integrales de los productos de inercia $P_{xz} = P_{yz} = 0$ y el eje es principal (**ejercicio: demostrar**).
- Un **eje de revolución** es por una parte eje de simetría, y por otra todo plano que lo contenga es de simetría. Por tanto dicho eje será principal, y cualquier eje normal al mismo también, por lo que el tensor de inercia será **cilíndrico**.

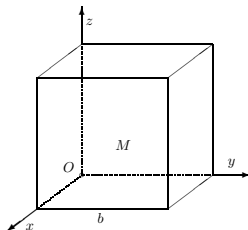
Tensor de inercia – Ejes principales y simetrías

- Continuando este ejemplo, el polinomio característico arroja las siguientes soluciones para los momentos principales de inercia:

Ejemplo 7.1, aptdo.

7.3.5 libro texto:

Cubo de masa M y lado b .



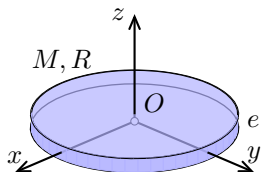
$$\det(\mathbf{I}_O - \lambda \mathbf{1}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{6}Mb^2 \\ \lambda_{\{2,3\}} = \frac{11}{12}Mb^2 \text{ (doble)} \end{cases}$$

- La dirección principal asociada a λ_1 es $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, eje diagonal del cubo. Para las otras dos direcciones son cualquier eje perpendicular a la diagonal.
- El tensor en un triedro principal es cilíndrico:

$$[\mathbf{I}_O] = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 11/12 & 0 \\ 0 & 0 & 11/12 \end{pmatrix} \quad (51)$$



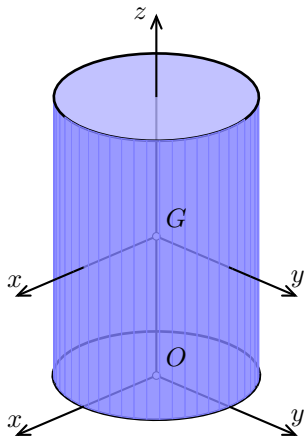
Tensor de inercia – Ejemplos



- Disco plano ($e \rightarrow 0$) de masa M y radio R :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}MR^2; \quad I_{zz} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$[\mathbf{I}_O] = MR^2 \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

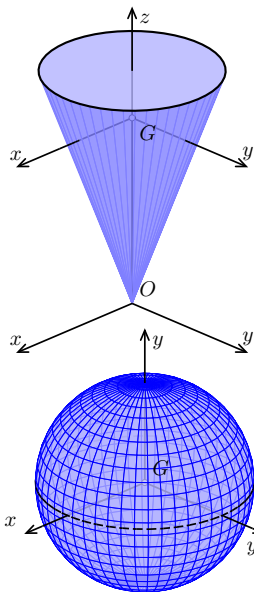


- Cilindro de masa M , radio R y altura H .
Momentos principales en el centro G :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2; \quad I_{zz} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$[\mathbf{I}_G] = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (53)$$

Tensor de inercia – Ejemplos



- Cono de revolución de masa M , radio R y altura H . Momentos principales en el vértice O :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{5}MH^2 + \frac{3}{20}MR^2; \quad I_{zz} = \frac{3}{10}MR^2$$

$$[\mathbf{I}_O] = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (54)$$

- Esfera de masa M y radio R :

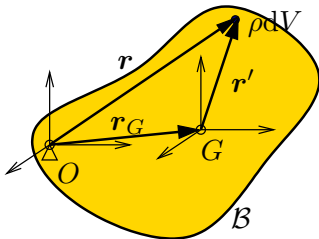
$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$[\mathbf{I}_G] = MR^2 \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \quad (55)$$

3 Tensor de inercia

- Concepto y expresiones
- Componentes
- Ejes principales y simetrías
- Campo tensorial

Tensor de inercia – Campo tensorial



- El tensor de inercia toma distinto valor según el punto del sólido en que se calcule. Consideramos por ejemplo un sólido B con un punto O y el CDM G . La relación entre los vectores de posición es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}' \quad (56)$$

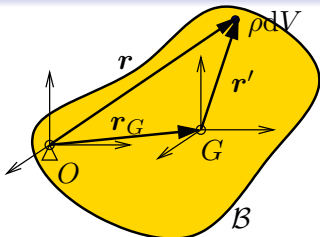
- El tensor en G se denomina tensor central de inercia y su expresión es

$$\mathbf{I}_G = \int_B (r'^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}') \rho dV \quad (57)$$

- El tensor en O tiene la expresión (21), que desarrollando resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= \int_B (r^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \rho dV \\ &= \int_B [(\mathbf{r}_G + \mathbf{r}')^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}')] \rho dV \end{aligned} \quad (58)$$

Tensor de inercia – Campo tensorial



- Desarrollando la ecuación anterior (58) y teniendo en cuenta que todas las integrales que aparecen del tipo $\int_B \mathbf{r}' \rho dV$ son nulas

- resulta¹¹

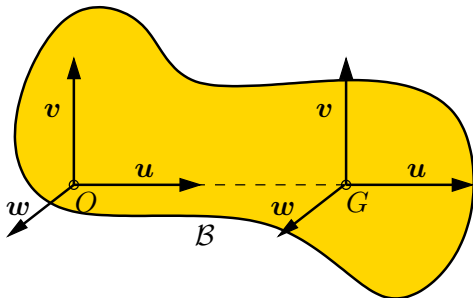
$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O &= \int_B [(\mathbf{r}_G + \mathbf{r}')^2 \mathbf{1} - (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}') \otimes (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}')] \rho dV \\ &= \underbrace{\int_B (r'^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}') \rho dV}_{\mathbf{I}_G} + \underbrace{\int_B (r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \rho dV}_{M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)} \end{aligned} \quad (59)$$

- Obteniéndose la relación del campo tensorial de inercia:

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G) \quad (60)$$

¹¹ Demostración detallada en aptdo. 7.3.6 del texto

Tensor de inercia – Campo tensorial



- Consideramos un sólido con unos ejes (u, v, w) que son principales en el CDM G . Adicionalmente, suponemos que O está situado sobre el eje (G, u) .
- Se cumple entonces que (u, v, w) son también principales en O

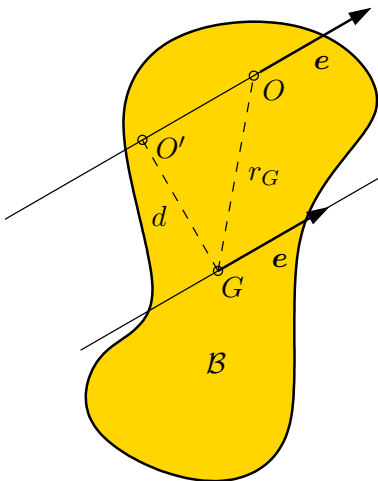
- Para la dirección u , considerando $r_G = r_G u$ y aplicando (60):

$$\begin{aligned} I_O \cdot u &= I_G \cdot u + M[r_G^2 u - (u \otimes u) \cdot (r_G^2 u)] \\ &= \lambda u + M[\cancel{r_G^2 u} - \cancel{r_G^2 u}(\cancel{u \cdot u})] = \lambda u \end{aligned}$$

- Para v normal a r_G , tal que $v \cdot u = 0$, aplicando de nuevo (60)

$$\begin{aligned} I_O \cdot v &= I_G \cdot v + M[r_G^2 v - (u \otimes u) \cdot (r_G^2 v)] \\ &= \mu v + M[r_G^2 v - r_G^2 (\cancel{u \cdot v}) \cancel{u}] = (\mu + M r_G^2) v \end{aligned}$$

Tensor de inercia – Campo tensorial



- **Teorema de Steiner.** Sea un eje por el centro de masas (G, e) en el cual conocemos el momento de inercia $I_{G,e}$. El momento de inercia respecto de un eje (O, e) paralelo por otro punto O y que diste d será

$$\begin{aligned} I_{O,e} &= e \cdot (I_O \cdot e) \\ &= e \cdot [I_G + M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)] \cdot e \\ &= I_{G,e} + M \underbrace{\left[r_G^2 - \overbrace{(e \cdot \mathbf{r}_G)(e \cdot \mathbf{r}_G)}^{\overline{OO'}^2} \right]}_{d^2} \end{aligned}$$

- Resulta el **Teorema de Steiner:**

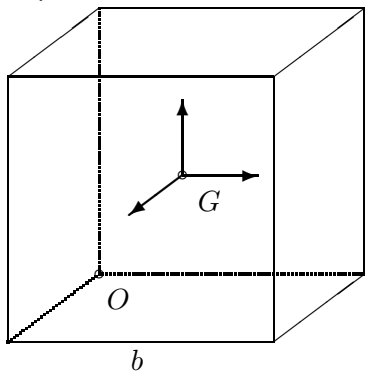
$$I_{O,e} = I_{G,e} + M d^2 \quad (61)$$

Tensor de inercia – Campo tensorial

Ejemplo 7.2, aptdo. 7.3.6

libro texto:

Cubo de masa M y lado b .
Obtención del tensor central
de inercia de un cubo
respecto de su centro G



Aplicamos la expresión (60) del campo tensorial de inercia, considerando $\mathbf{r}_G$:

$$\{\mathbf{r}_G\} = \begin{Bmatrix} b/2 \\ b/2 \\ b/2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r_G^2 = \frac{3b^2}{4}; \\ r_{G,i} r_{G,j} = \frac{b^2}{4} \quad (\forall i, j) \end{cases}$$

$$[M(r_G^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)]_{ij} = M(r_G^2 \delta_{ij} - r_{G,i} r_{G,j})$$

y su matriz de componentes es

$$M \frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 3-1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix}$$

Resulta finalmente un **tensor esférico**:

$$[\mathbf{I}_G] = Mb^2 \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$



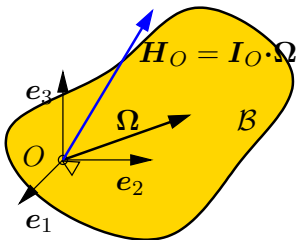
Parte III

Clase T7-3: Ecuaciones de la dinámica: ecuaciones de Euler, de Lagrange, cálculo de reacciones

4 Ecuaciones de la dinámica

- Ecuaciones de Euler
- Ecuaciones de Lagrange
- Reacciones

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Euler



- Consideramos un sólido $\mathcal{B}$ con un punto fijo O , cuya velocidad de rotación es Ω .
- el momento cinético respecto expresado mediante el tensor de inercia es

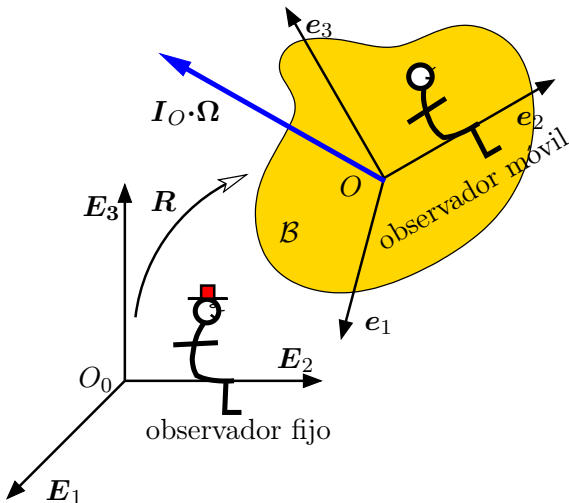
$$H_O = I_O \cdot \Omega \quad (62)$$

- Suponiendo que la resultante de momentos vale M_O , la ecuación de la dinámica se expresa como

$$M_O = \frac{d}{dt} H_O = \frac{d}{dt} (I_O \cdot \Omega) \quad (63)$$

- En la derivada en la ecuación anterior (63) interviene la variación tanto de I_O como de Ω .

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Euler



- La derivada de $I_O \cdot \Omega$ en (63) se puede hacer por el observador fijo o el observador móvil
- Para el observador fijo el tensor de inercia I_O varía con la rotación R del cuerpo, su derivada sería distinta de cero:

$$\frac{d}{dt} I_O \neq 0$$

- Sin embargo, para el observador móvil del cuerpo, I_O es constante:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{móvil}} I_O = 0$$

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Euler

- Para evitar la derivada del tensor de inercia, derivamos respecto al triedro del cuerpo, en el que el tensor de inercia es constante. Sin embargo, hay que agregar un término complementario de derivación

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{H}_O &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\text{móvil}} (\mathbf{H}_O) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{H}_O \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{\text{móvil}} (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \\ &= \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})\end{aligned}\tag{64}$$

- Por tanto, la ecuación de la dinámica puede formularse como

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})}\tag{65}$$

- Esta fórmula es la expresión vectorial de las **ecuaciones de Euler**.



Términos de las ecuaciones de Euler

Las ecuaciones de Euler en expresión vectorial (65) son:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$

En ellas se distinguen dos sumandos:

- 1 El sumando $\mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ es **proporcional** a la aceleración angular $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, como en la ecuación clásica *Fuerza = masa × aceleración*
- 2 El sumando $\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$ introduce **términos cuadráticos** respecto a $\boldsymbol{\Omega}$, que da un carácter no lineal a las ecuaciones (65).

Estos términos cuadráticos en las ecuaciones son los responsables de los efectos **centrífugos** y **giroscópicos** del comportamiento dinámico.

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Euler

- Para operar con la ecuación de Euler la expresaremos mediante sus componentes en un triedro de coordenadas dado, de forma matricial. La opción más directa es emplear el **triedro del cuerpo** (i, j, k).
- Siempre que sea posible conviene emplear el **triedro principal de inercia**¹². Suponiendo que los momentos principales son (A, B, C) , la matriz es

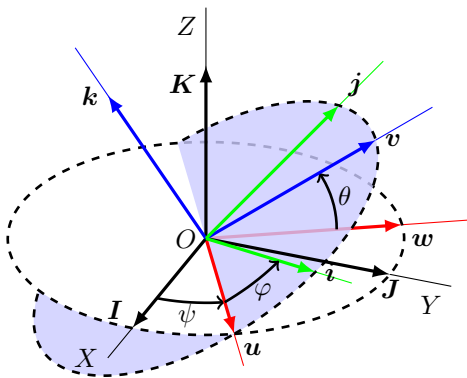
$$[I_O] = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (66)$$

- Las expresiones de la **velocidad y la aceleración angular** son

$$\{\Omega\} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}; \quad \{\dot{\Omega}\} = \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} \quad (67)$$

¹²Recordamos que las direcciones principales son mutuamente ortogonales y que están ligadas al sólido

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Euler



Donde (p, q, r) son las componentes de Ω en el triédro del cuerpo (i, j, k) mostrado en la figura

Su expresión en función de los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) es

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ q = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{cases} \quad (68)$$

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Euler

- Las **componentes** de los términos de las ecuaciones de Euler (65) son

$$\begin{aligned} I_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} &= A\dot{p}\mathbf{i} + B\dot{q}\mathbf{j} + C\dot{r}\mathbf{k} \\ \boldsymbol{\Omega} \wedge (I_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix} \\ &= (C - B)qr\mathbf{i} - (C - A)pr\mathbf{j} + (B - A)pq\mathbf{k} \end{aligned} \quad (69)$$

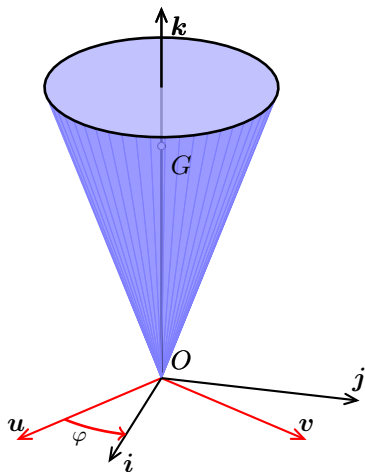
- Con lo cual podemos expresar las **ecuaciones de Euler en componentes**¹³

$$\begin{aligned} M_x &= A\dot{p} - (B - C)qr \\ M_y &= B\dot{q} - (C - A)rp \\ M_z &= C\dot{r} - (A - B)pq \end{aligned} \quad (70)$$

- Estas ecuaciones deben complementarse con las expresiones de $(\boldsymbol{\Omega}) = (p, q, r)$ antes definidas (67).

¹³ Obsérvese la estructura circular de todos los términos en estas ecuaciones

Ecuaciones de Euler – triedro intermedio



- Consideramos un sólido con tensor de inercia cilíndrico, por ejemplo un sólido de revolución, con momentos principales (A, A, C) .
- En estos casos puede resultar conveniente hacer las derivadas de la ecuación dinámica respecto a un **observador en el triedro intermedio** (u, v, k) .
- El triedro intermedio puede considerarse como el del cuerpo (i, j, k) restándole la rotación propia φk
- Conviene tomar k **según el eje de simetría** cilíndrica, asociado al momento principal C .

Ecuaciones de Euler – triedro intermedio

- La velocidad de rotación del triedro intermedio es $\boldsymbol{\Omega}_{ti} = \boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}$. La expresión vectorial de las ecuaciones dinámicas es ahora

$$\mathbf{M}_O = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\text{rel } ti} (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (71)$$

- Al ser el tensor cilíndrico, es invariante respecto a la rotación propia $\dot{\varphi}\mathbf{k}$, por lo que $d\mathbf{I}_O/dt|_{\text{rel } ti} = \mathbf{0}$. La ecuación vectorial es por tanto

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{\text{rel } ti} + (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi}\mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (72)$$

Ecuaciones de Euler – triedro intermedio

- Para las componentes de (72) conviene emplear el triedro intermedio, en el cual las componentes de la velocidad y aceleración angular relativa son¹⁴

$$\{\boldsymbol{\Omega}\} = \begin{Bmatrix} p^{(i)} \\ q^{(i)} \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right\}_{\text{rel ti}} = \begin{Bmatrix} \dot{p}^{(i)} \\ \dot{q}^{(i)} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} \quad (73)$$

- Los términos de la ecuación (72) son por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_O \cdot \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \Big|_{\text{rel ti}} &= A\dot{p}^{(i)} \mathbf{u} + A\dot{q}^{(i)} \mathbf{v} + C\dot{r} \mathbf{k} \\ (\boldsymbol{\Omega} - \dot{\varphi} \mathbf{k}) \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{k} \\ p^{(i)} & q^{(i)} & r - \dot{\varphi} \\ A p^{(i)} & A q^{(i)} & C r \end{vmatrix} \\ &= [(C - A)q^{(i)}r^{(i)} + Aq^{(i)}\dot{\varphi}] \mathbf{u} \\ &\quad - [(C - A)p^{(i)}r + Ap^{(i)}\dot{\varphi}] \mathbf{v} \end{aligned} \quad (74)$$

¹⁴ nótese que la componente r es igual en ambos triedros

Ecuaciones de Euler – triedro intermedio

- Las ecuaciones de euler relativas al triedro intermedio en componentes resultan:

$$\begin{aligned}M_u &= A\dot{p}^{(i)} - (A - C)q^{(i)}r + Aq^{(i)}\dot{\varphi} \\M_v &= A\dot{q}^{(i)} - (C - A)rp^{(i)} - Ap^{(i)}\dot{\varphi} \\M_z &= C\dot{r}\end{aligned}\tag{75}$$

Observaciones para ecuaciones en triedro intermedio

- Siempre que exista simetría cilíndrica en el tensor las ecuaciones en el triedro intermedio **resultan más convenientes**, ya que las componentes de Ω en este triedro son más sencillas
- Se observa fácilmente la **integral primera** de velocidad de rotación constante según el eje de simetría^a:

$$M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \text{cte.}\tag{76}$$

4 Ecuaciones de la dinámica

- Ecuaciones de Euler
- Ecuaciones de Lagrange
- Reacciones

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Lagrange

- Las ecuaciones de Lagrange de la dinámica analítica pueden emplearse también para el caso del sólido rígido. Para ello se tomarían como coordenadas generalizadas los ángulos de Euler:

$$(q_j) = (\psi, \theta, \varphi); \quad (\dot{q}_j) = (\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) \quad (77)$$

- Las tres ecuaciones que resultan son equivalentes a las ecuaciones de Euler, aunque no necesariamente idénticas.
- Tienen la ventaja de que sólo es necesario calcular la magnitud (escalar) de la Lagrangiana, $L = T - V$, y a partir de ella realizar las derivadas.
- Otra potencial ventaja de las ecuaciones de Lagrange es para la formulación de integrales primeras o constantes del movimiento (energía, Jacobi, coordenadas cíclicas)

Ecuaciones de la dinámica – Ecuaciones de Lagrange

- La ecuación de Lagrange para φ sí coincide con una de las ecuaciones de Euler. Se comprueba fácilmente desarrollando las derivadas:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \quad (78)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} \right) = Cr \quad (79)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = (A - B)pq \quad (80)$$

- Con lo que resulta una ecuación idéntica a la tercera de Euler,

$$Cr - (A - B)pq = Q_{\varphi} (= M_z) \quad (81)$$

- Las otras dos ecuaciones de Lagrange puede comprobarse que son combinación lineal de las ecuaciones de Euler.
- Escogiendo el eje z sucesivamente según los otros dos ejes del triedro, obtendríamos las otras dos ecuaciones de Euler, lo que comprueba su equivalencia.



4 Ecuaciones de la dinámica

- Ecuaciones de Euler
- Ecuaciones de Lagrange
- Reacciones

Ecuaciones de la dinámica – Reacciones

- Sea un sólido con un punto O fijo, sobre el que actúan fuerzas exteriores activas, cuya resultante es

$$\mathbf{F}^{\text{act}} = \sum_i \mathbf{f}_i^{\text{act}} \quad (82)$$

- La reacción $\mathbf{R}_O$ se obtiene a partir de la ecuación de balance de cantidad de movimiento:

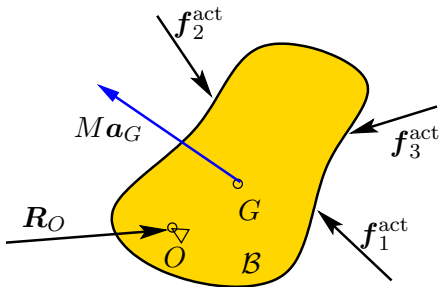
$$\mathbf{F}^{\text{act}} + \mathbf{R}_O = M\mathbf{a}_G \quad (83)$$

- donde $\mathbf{a}_G$ se obtendría de la expresión cinemática

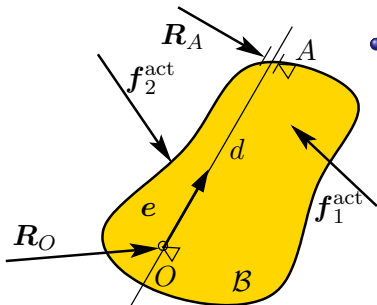
$$\mathbf{a}_G = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{r}_{OG} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_{OG})$$

- y la velocidad y aceleración angular $\boldsymbol{\Omega}$, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ de las ecuaciones de Euler

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{I}_O \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega})$$



Ecuaciones de la dinámica – Reacciones



- Sea ahora un sólido con un eje fijo, materializado por los puntos (O, A) , siendo $\overline{OA} = d$. La ecuación de Euler en O es

$$M_O^{\text{act}} + d e \wedge R_A = I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega) \quad (84)$$

- Esta ecuación se puede resolver para R_A

$$R_A = \frac{1}{d} [I_O \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (I_O \cdot \Omega) - M_O^{\text{act}}] \wedge e \quad (85)$$

- En el caso particular que el eje e sea principal, $I_O \cdot e = I_{O,e} e$ resulta

$$R_A = \frac{1}{d} e \wedge M_O^{\text{act}} \quad (= \text{reacción estática!}) \quad (86)$$

- Finalmente la reacción en O se obtendría mediante

$$R_O = M a_G - F^{\text{act}} - R_A \quad (87)$$