Mecánica-ICT

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de julio de 2012)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

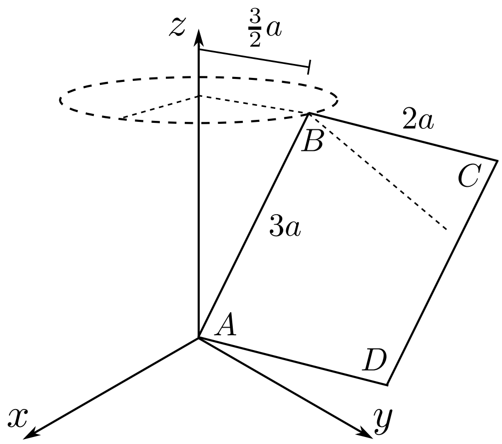
Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Sea un rectángulo macizo pesado $ABCD$ de masa m y lados $3a$ y $2a$. Tal como muestra la figura, el vértice A es fijo y el vértice B permanece con enlace liso sobre una circunferencia fija horizontal de radio $3/2a$.

Se pide:

1. Identificar los grados de libertad del problema y expresar la velocidad angular del rectángulo.

2. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento y en el caso de que existan calcularlas.

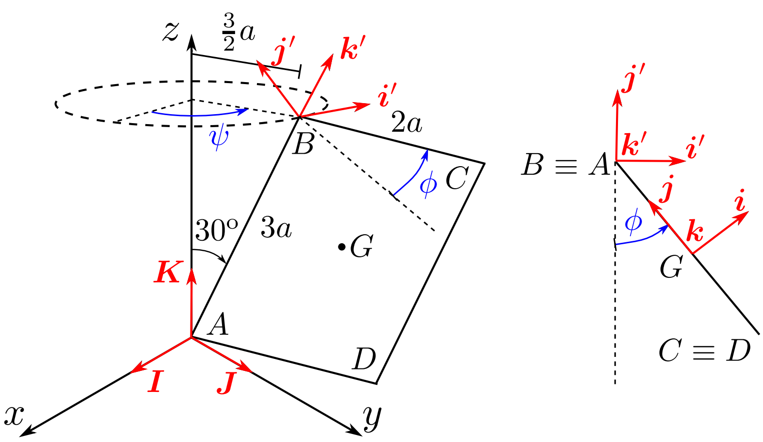


NOTA: En el instante inicial el rectángulo se encuentra en el plano Axz, la velocidad del punto B vale $3\sqrt{3}v_0$ y la velocidad angular del rectángulo alrededor del segmento AB es nula.

1.- El movimiento tiene dos grados de libertad: el giro ψ del segmento AB alrededor del eje vertical Az y el giro ϕ del rectángulo alrededor del segmento AB.

Utilizaremos los siguientes sistemas de coordenadas:

- El sistema fijo $\{A; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$
- El sistema móvil $\{B; \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'\}$ donde el eje $\boldsymbol{k}'$ tiene la dirección AB, el eje $\boldsymbol{i}'$ es horizontal y tangente a la circunferencia que describe el punto B y el eje $\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{k}' \wedge \boldsymbol{i}'$.
- El sistema móvil $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ que es solidario con el rectángulo, siendo $\boldsymbol{k}$ paralelo al segmento AB, $\boldsymbol{j}$ paralelo al segmento DA e $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{k}$.



La velocidad angular se expresa entonces como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{K} + \dot{\phi}\boldsymbol{k}' = \frac{1}{2}\dot{\psi}\boldsymbol{j}' + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi} + \dot{\phi}\right)\boldsymbol{k}' = \frac{1}{2}\dot{\psi}\operatorname{sen}\phi\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\dot{\psi}\cos\phi\boldsymbol{j} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi} + \dot{\phi}\right)\boldsymbol{k} \qquad (1)$$

donde $\boldsymbol{K} = \frac{1}{2}\boldsymbol{j}' + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}'$ y $\boldsymbol{j}' = \operatorname{sen}\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}$.

2.– Dado que todas las fuerzas actuantes cortan o son paralelas al eje vertical que pasa por A (la reacción en B debe estar en el plano que contiene al segmento AB y al eje Az) se conserva la componente según $\boldsymbol{K}$ del momento cinético en A:

$$\boldsymbol{H}_A \cdot \boldsymbol{K} = (\mathbf{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{K} = cte \tag{2}$$

siendo $\mathbf{I}_A$ el tensor de inercia del rectángulo en A.

Todas las fuerzas que trabajan son conservativas y no hay ningún agente externo que esté imponiendo un movimiento, por lo tanto se conserva la energía mecánica:

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega}) + mg \left(\underbrace{\boldsymbol{r}_{AG} \cdot \boldsymbol{K}}_{z_G} \right) = cte \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{r}_{AG} = -a\boldsymbol{j} + 3a/2\boldsymbol{k}$

La expresión del tensor de inercia $\mathbf{I}_G$ del rectángulo en G en los ejes $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ vale:

$$\mathbf{I}_G = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{13}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Obtenemos ahora la expresión del tensor de inercia $\mathbf{I}_A$ del rectángulo en A en los ejes $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ aplicando:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_G + m\left(\|\boldsymbol{r}_{AG}^2\|\mathbf{1} - \boldsymbol{r}_{AG} \otimes \boldsymbol{r}_{AG}\right) = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{5}$$

La expresión del momento cinético en A vale:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_A = \mathbf{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega} = & ma^2 \left[\frac{13}{6}\dot{\psi} \operatorname{sen}\phi \boldsymbol{i} \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}\left(\dot{\psi}\cos\phi + \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\psi} + \dot{\phi}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{3}{4}\dot{\psi}\cos\phi + \frac{2}{3}\sqrt{3}\dot{\psi} + \frac{4}{3}\dot{\phi}\right)\boldsymbol{k} \right] \end{aligned} \tag{6}$$

permitiéndonos obtener la primera integral primera del movimiento desarrollando (2) como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_A \cdot \boldsymbol{K} &= ma^2 \left(\frac{13}{12}\dot{\psi}\operatorname{sen}^2\phi + \frac{3}{4}\dot{\psi}\cos^2\phi + \frac{3}{4}\left(\sqrt{3}\dot{\psi} + \dot{\phi}\right)\cos\phi + \frac{2}{3}\sqrt{3}\dot{\phi} + \dot{\psi} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(7\sqrt{3} + 9\right) amv_0 \end{aligned} \tag{7}$$

La segunda integral primera del movimiento la obtenemos a partir de (3) como:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{I}_A \cdot \boldsymbol{\Omega}) + mg\left(\boldsymbol{r}_{AG} \cdot \boldsymbol{K}\right) \\ &= ma^2 \left(\frac{13}{24}\dot{\psi}^2\operatorname{sen}^2\phi + \frac{3}{8}\dot{\psi}^2\cos^2\phi + \frac{2}{3}\sqrt{3}\dot{\phi}\dot{\psi} + \frac{3}{8}\left(\sqrt{3}\dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\right)\cos\phi + \frac{2}{3}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(2a\cos\phi - 3\sqrt{3}a\right) gm \\ &= \frac{1}{4}\left(3\sqrt{3} - 2\right) agm + \frac{3}{2}\left(3\sqrt{3} + 7\right) mv_0^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Tanto en la ecuación (7) como en la ecuación (8) se han utilizado como condiciones iniciales para $t = 0$ los valores $\phi_0 = 0$, $\dot{\phi}_0 = 0$ y $\dot{\psi}_0 = 2\sqrt{3}v_0/a$.