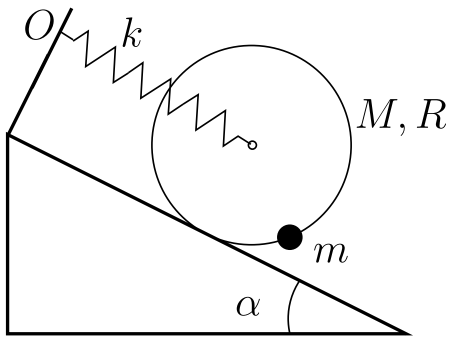
Mecánica-ICT

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (16 de julio de 2012)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un aro de masa M y radio R rueda sin deslizar sobre un plano fijo e inclinado un ángulo α, estando su centro unido a un punto fijo O mediante un muelle de constante k. Asimismo, el aro lleva ensartada una partícula de masa m que se mueve por el mismo con enlace bilateral liso. Se pide:



1. Obtener la función Lagrangiana.
2. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Linealizar las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior para el caso de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable.
4. En el caso particular en que $M = 3m$, $k = 4mg/R$ y $\alpha = 60°$, obtener las frecuencias propias y los modos normales de oscilación del sistema.

---

1. Llamando x al alargamiento del muelle a partir de su longitud natural, y θ al ángulo que forma el radio del aro que contiene a la partícula, con la vertical descendente, las expresiones de la energía cinética y de la energía potencial son:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\theta}^2R^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}R\cos(\theta+\alpha)) \\ &= M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \qquad (1) \\ V &= -Mgx\operatorname{sen}\alpha - mg(x\operatorname{sen}\alpha + R\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2) \end{aligned}$$

resultando:

$$\begin{aligned} L = T - V = \left(M + \frac{1}{2}m\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mR\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ + Mgx\operatorname{sen}\alpha + mg(x\operatorname{sen}\alpha + R\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

2. Derivando en (3) se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$(2M+m)\ddot{x} + mR\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) - mR\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\theta+\alpha) - (M+m)g\operatorname{sen}\alpha + kx = 0 \qquad (4)$$

$$mR\ddot{x}\cos(\theta+\alpha) + mR^2\ddot{\theta} + mgR\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (5)$$

3. Llamando y al alargamiento del muelle medido a partir del alargamiento estático δ_{est}, las coordenadas generalizadas x e y están relacionadas mediante la expresión:

$$x = y + \delta_{\text{est}} \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (4) y (5) se obtienen las ecuaciones diferenciales que posteriormente linealizaremos para las pequeñas oscilaciones:

$$(2M+m)\ddot{y} + mR\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) - mR\dot{\theta}^2\operatorname{sen}(\theta+\alpha) + ky = 0 \tag{7}$$

$$mR\ddot{y}\cos(\theta+\alpha) + mR^2\ddot{\theta} + mgR\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{8}$$

Las ecuaciones (7) y (8) se linealizan sustituyendo $\cos(\theta+\alpha)$ por $\cos\alpha$ y $\operatorname{sen}\theta$ por θ, ya que en la posición de equilibrio estable $\theta = 0$. Despreciando además los infinitesimos de orden dos y superiores, resultan las ecuaciones linealizadas que se piden:

$$(2M+m)\ddot{y} + mR\ddot{\theta}\cos\alpha + ky = 0 \tag{9}$$

$$mR\ddot{y}\cos\alpha + mR^2\ddot{\theta} + mgR\theta = 0 \tag{10}$$

4. Las ecuaciones (9) y (10) se expresan en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 2M+m & mR\cos\alpha \\ mR\cos\alpha & mR^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Sustituyendo los valores dados en el enunciado ($\alpha = 60°$, $M = 3m$ y $k = 4mg/R$) en (11), las matrices de masa $\mathbf{M}$ y rigidez $\mathbf{K}$ del sistema resultan:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 7m & mR/2 \\ mR/2 & mR^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 4mg/R & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}$$

Para calcular las frecuencias propias resolvemos la ecuación característica $\det(-\omega^2\mathbf{M}+\mathbf{K}) = 0$:

$$27R^2\omega^4 - 44gR\omega^2 + 16g^2 = 0$$

resultando:

$$\omega_1^2 = \frac{22-2\sqrt{13}}{27}\frac{g}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{22-2\sqrt{13}}{27}\frac{g}{R}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{22+2\sqrt{13}}{27}\frac{g}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{22+2\sqrt{13}}{27}\frac{g}{R}}$$

Los modos normales $\boldsymbol{a}_i$ se obtienen sustituyendo cada una de las frecuencias propias ω_i en la ecuación vectorial $(-\omega_i^2\mathbf{M}+\mathbf{K})\{\boldsymbol{a}\}_i = \{\mathbf{0}\}$ y resolviendo. Para ω_1 resulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{14\sqrt{13}-46}{27R} & \frac{\sqrt{13}-11}{27} \\ \frac{\sqrt{13}-11}{27} & \frac{(2\sqrt{13}+5)R}{27} \end{pmatrix} \{\boldsymbol{a}\}_1 = \{\mathbf{0}\} \qquad \Rightarrow \qquad \{\boldsymbol{a}\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{46-14\sqrt{13}}{(\sqrt{13}-11)R} \end{Bmatrix}$$

y para ω_2:

$$\begin{pmatrix} \frac{14\sqrt{13}+46}{27R} & \frac{\sqrt{13}+11}{27} \\ \frac{\sqrt{13}+11}{27} & \frac{(2\sqrt{13}-5)R}{27} \end{pmatrix} \{\boldsymbol{a}\}_2 = \{\mathbf{0}\} \qquad \Rightarrow \qquad \{\boldsymbol{a}\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{46+14\sqrt{13}}{(\sqrt{13}+11)R} \end{Bmatrix}$$