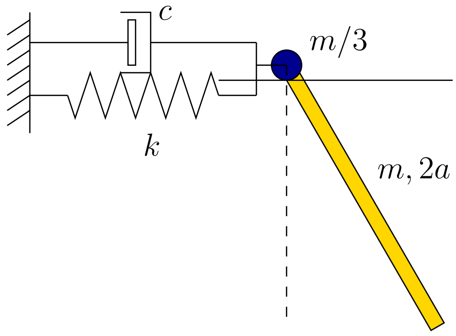
# Mecánica – ICT

EXAMEN FINAL (18 de junio del 2012)

*Apellidos* *Nombre* *N.º* *Grupo*

*Ejercicio 2º* (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un sistema plano formado por una partícula de masa $m/3$ y una barra de masa $m$ y longitud $2a$ unida a la partícula en un extremo, tal como se representa en la figura adjunta. La barra puede girar libremente en el plano vertical, sometida a su peso. La partícula puede deslizar sobre una recta horizontal lisa, unida mediante un resorte lineal de constante $k$ y un amortiguador viscoso de constante $c$ a una base fija.




Se pide:

1. Identificar los grados de libertad del sistema y obtener la expresión de la energía cinética del sistema, energía potencial y fuerzas generalizadas no conservativas.
2. Ecuaciones de la dinámica.
3. Suponiendo $c = 0$, ecuaciones de la dinámica para pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, expresando las matrices de masa y rigidez.
4. Considerando el valor $k = mg/a$ y en ausencia de amortiguamiento ($c = 0$), obtener las frecuencias propias y los modos normales de vibración.

---

**§1.** El sistema tiene dos grados de libertad, la elongación $x$ del resorte respecto a su posición natural y el ángulo $\theta$ que forma la varilla con la vertical descendente. La energía cinética es suma de la varilla y la partícula,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\frac{m}{3}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + \frac{1}{2}\frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{4}{3}\dot{x}^2 + \frac{4}{3}a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta\right). \end{aligned} \tag{1}$$

La energía potencial proviene del resorte y del peso de la varilla:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mga\cos\theta\,. \tag{2}$$

Por último, la fuerza del amortiguador viscoso es no conservativa y podemos identificar las fuerzas generalizadas a partir de la expresión del trabajo virtual que desarrolla:

$$\delta W^{\text{nc}} = -c\dot{x}\delta x \quad \Rightarrow \quad Q_x^{\text{nc}} = -c\dot{x}\,, \quad Q_\theta^{\text{nc}} = 0\,. \tag{3}$$

**§2.** Formando la Lagrangiana $L = T - V$ y derivando se obtienen las ecuaciones de la dinámica:

$$\frac{4}{3}m\ddot{x} + ma\ddot{\theta}\cos\theta - ma\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + c\dot{x} + kx = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} + ma\ddot{x}\cos\theta + mga\operatorname{sen}\theta = 0\,. \tag{5}$$

**§3.** La posición de equilibrio es obviamente $(x,\theta)=(0,0)$, y además es fácil comprobar que es estable (no lo sería si el péndulo estuviese invertido). Tomando ahora $c=0$ y linealizando las ecuaciones (4), (5) se obtienen las ecuaciones para pequeñas oscilaciones:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}m\ddot{x}+ma\ddot{\theta}+kx=0\,,\\ \frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta}+ma\ddot{x}+mga\theta=0\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Las matrices de masa y rigidez son respectivamente los coeficientes de las aceleraciones y de las coordenadas en estas ecuaciones:

$$[\mathbf{M}]=\begin{pmatrix}4m/3 & ma\\ ma & 4ma^2/3\end{pmatrix};\qquad [\mathbf{K}]=\begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & mga\end{pmatrix}. \tag{7}$$

**§4.** La ecuación característica para los autovalores $\lambda$ es

$$0=\det([\mathbf{K}]-\lambda[\mathbf{M}])=\begin{vmatrix}k-\lambda(4m/3) & -\lambda ma\\ -\lambda ma & mga-\lambda(4ma^2/3)\end{vmatrix} \tag{8}$$

Sustituyendo $k=mg/a$ y desarrollando se obtienen las frecuencias propias,

$$\left(\frac{g}{a}-\frac{4}{3}\lambda\right)^2=\lambda^2 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\omega_1^2=\frac{3g}{7a}\,,\quad \lambda_2=\omega_2^2=\frac{3g}{a}\,. \tag{9}$$

Por último, los modos normales resultan de la ecuación de autovalores particularizada para cada una de las frecuencias propias:

$$\begin{pmatrix}mg/a-\lambda(4m/3) & -\lambda ma\\ -\lambda ma & mga-\lambda(4ma^2/3)\end{pmatrix}_{\lambda=3g/7a}\begin{Bmatrix}a_{11}\\ a_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \{\mathbf{a}_1\}=\begin{Bmatrix}1\\ 1/a\end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix}mg/a-\lambda(4m/3) & -\lambda ma\\ -\lambda ma & mga-\lambda(4ma^2/3)\end{pmatrix}_{\lambda=3g/a}\begin{Bmatrix}a_{21}\\ a_{22}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \{\mathbf{a}_2\}=\begin{Bmatrix}1\\ -1/a\end{Bmatrix} \tag{11}$$