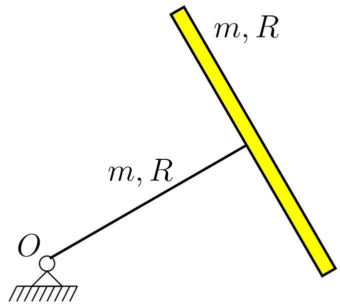
Mecánica-ICT

EXAMEN FINAL (18 de junio de 2012)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un sólido pesado está formado por una varilla de masa m y longitud R, soldada perpendicularmente por uno de sus extremos a un disco de masa m y radio R. El otro extremo O de la varilla está articulado a un punto fijo, de manera que el movimiento de la misma está obligado a desarrollarse en un plano vertical fijo, pudiendo girar libremente el sólido alrededor del eje de la varilla (en la figura se muestra la sección del sólido contenida en dicho plano vertical, en una posición genérica).

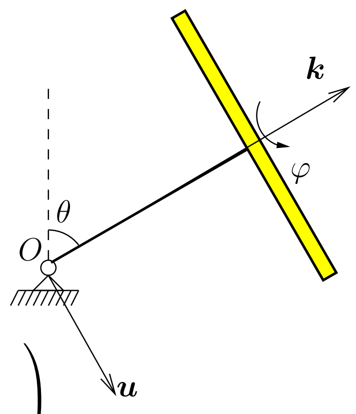


Se pide:

1. Tensor de inercia en O.
2. Ecuaciones de Euler de la dinámica.
3. Si en el instante inicial la varilla forma 30° con la vertical y el sólido gira con velocidad angular ω_0 alrededor de la varilla, escribir e interpretar las integrales primeras del movimiento.
4. Calcular el momento reactivo en el punto O, en función de la posición del sólido.

---

1. El sólido tiene dos grados de libertad: la nutación θ y la rotación propia φ. Para resolver el problema tomamos el triedro intermedio $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}\}$ de la figura: $\boldsymbol{k}$ según la varilla, $\boldsymbol{u}$ contenido en el plano vertical en que se mueve la varilla y $\boldsymbol{v}$ definiendo un triedro positivo junto con $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{k}$. El tensor de inercia en O, definidas sus componentes en el triedro $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}\}$ es:



$$\boldsymbol{I}_O = \boldsymbol{I}_{O,\text{varilla}} + \boldsymbol{I}_{O,\text{disco}} = \begin{pmatrix} 1/3mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 5/4mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/4mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2mR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/12mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 19/12mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2mR^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. La velocidad angular del sólido es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{v} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{2}$$

y el momento cinético en O:

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega} = \frac{19}{12}mR^2\dot{\theta}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{3}$$

Para obtener las ecuaciones de Euler, aplicamos el teorema del momento cinético en O. Utilizando el triedro intermedio y derivando en dichos ejes móviles:

$$\boldsymbol{M}_O = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_O}{dt}\right)_{\text{rel}} + \dot{\theta}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}_O \tag{4}$$

En el punto fijo O es necesario que haya un momento reactivo M para mantener el movimiento de la varilla en el plano vertical. Dado que el sólido gira libremente alrededor de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{k}$, dicho momento lleva la dirección $\boldsymbol{u}$. Por tanto el momento de las fuerzas en O viene dado por el momento del peso y dicho momento reactivo:

$$\boldsymbol{M}_O = M\boldsymbol{u} + \frac{3}{2}mgR\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{v} \tag{5}$$

Sustituyendo (1,3,5) en (4) y operando, resultan las ecuaciones pedidas:

$$M = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \tag{6}$$

$$\frac{18g}{19R}\operatorname{sen}\theta = \ddot{\theta} \tag{7}$$

$$0 = \ddot{\varphi} \tag{8}$$

3. Las integrales primeras corresponden a la conservación de la proyección sobre $\boldsymbol{k}$ del momento cinético, y a la conservación de la energía:

$$\left(\frac{19}{12}mR^2\dot{\theta}\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{k}\right)\cdot\boldsymbol{k} = h \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\Omega} + \frac{3}{2}mgR\cos\theta = E \tag{10}$$

Con las condiciones iniciales $\theta = 30°$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\varphi} = \omega_0$, se calculan las constantes h y E en (9) y (10). Operando en dichas ecuaciones resulta finalmente:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \tag{11}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{36g}{19R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right) \tag{12}$$

Obsérvese que la ecuación (11), que establece que la rotación propia es constante, se puede obtener integrando la ecuación de Euler (8). Análogamente, la ecuación (12) se puede obtener integrando la ecuación de Euler (7).

4. Sustituyendo (11) y (12) en (6) se calcula el valor del momento reactivo M en función de la posición del sólido:

$$M = \pm 3mR^2\omega_0\sqrt{\frac{g}{19R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)} \tag{13}$$