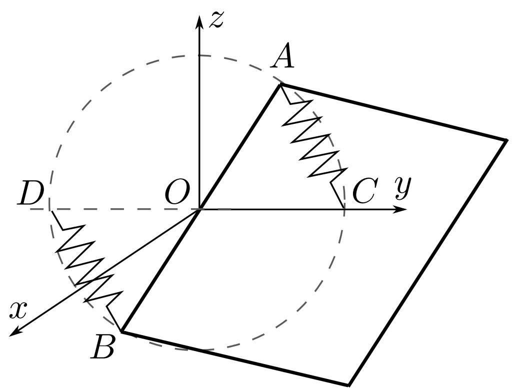
Grado en Ingeniería Civil y Territorial

Mecánica – ICT

EXAMEN EXTRAORDINARIO (15 de julio de 2013)

Apellidos	*Nombre*	*Nº mat.*

Ejercicio 2º (Puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.



Sea una placa pesada cuadrada de lado $2a$ y de masa m. Dicha placa se mueve con el movimiento más general posible tal que dos de sus vértices contiguos A y B se desplazan sin rozamiento en una circunferencia de radio a, contenida en el plano Oyz. Unidos a los vértices A y B y a los puntos fijos C y D hay sendos muelles de constante elástica k y longitud natural nula (ver figura). En el instante inicial el cuadrado está en reposo, su lado AB tiene la dirección del eje Oz y está en el plano Oxz de forma que la coordenada x de su centro de masas es positiva.

Para el sistema así descrito se pide:

1. Grados de libertad del problema y velocidad angular de la placa. Expresión de la energía cinética y de la energía potencial en función de los grados de libertad y de sus derivadas.

2. Razonar la existencia de integrales primeras y en el caso de que existan obtener su expresión en función de los grados de libertad y de sus derivadas.

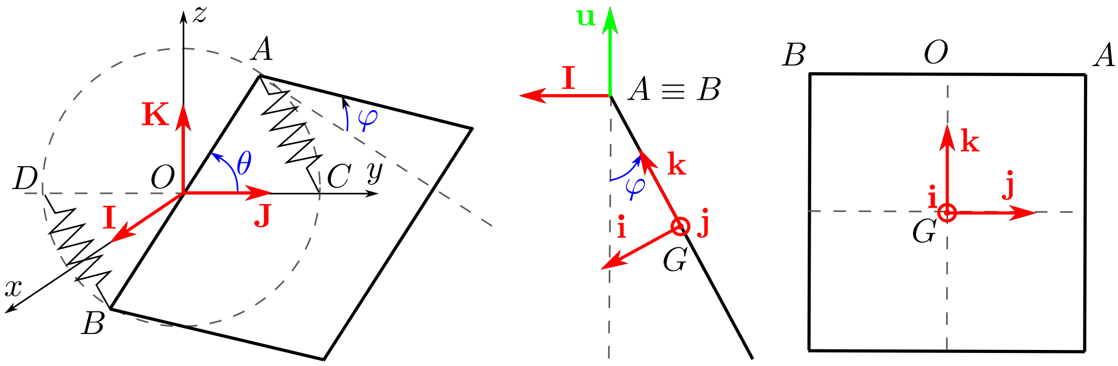
3. Ecuaciones del movimiento en función de los grados de libertad y de sus derivadas.

4. Obtener el valor de la fuerza F que hay que aplicar en el punto A para que la velocidad angular de rotación del segmento AB sea constante y de módulo ω.

⋆

1.– El problema tiene dos grados de libertad. Tal como indica la figura consideraremos el giro θ del lado AB según el eje $\boldsymbol{I}$ y el giro φ del cuadrado respecto del lado AB. Además del sistema fijo $\{O; \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ utilizaremos los ejes del cuerpo $\{G; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ cumpliéndose (ver figura):

$$\boldsymbol{I} = \cos\varphi \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{k}; \;\; \boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j} + \cos\theta \boldsymbol{u} = \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j} - \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \boldsymbol{i} + \cos\theta\cos\varphi \boldsymbol{k} \quad (1)$$



La velocidad angular de la placa vale:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{I} + \dot{\varphi}\boldsymbol{j} = \dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k} \tag{2}$$

Dado que el punto O es fijo, la energía cinética del sistema vale:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{I}_O\cdot\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\theta}^2 + 4\dot{\varphi}^2 + 4\dot{\theta}^2\cos^2\varphi\right] \tag{3}$$

siendo el tensor de inercia $\mathbf{I}_O$ en los ejes del cuerpo:

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + m\left(\boldsymbol{r}_{\mathrm{GO}}^2\mathbf{1} - \boldsymbol{r}_{\mathrm{GO}}\otimes\boldsymbol{r}_{\mathrm{GO}}\right) = \frac{1}{3}ma^2\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \text{con } \boldsymbol{r}_{\mathrm{GO}} = a\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

La energía potencial vale:

$$V = mg\left(\boldsymbol{r}_{\mathrm{OG}}\cdot\boldsymbol{K}\right) + 2\frac{1}{2}k\left(2a\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^2 = -mga\cos\theta\cos\varphi + 2a^2k(1-\cos\theta) \tag{5}$$

2.– Todas las fuerzas que realizan trabajo son conservativas y no hay ningún movimiento impuesto por lo que se conserva la energía:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\theta}^2 + 4\dot{\varphi}^2 + 4\dot{\theta}^2\cos^2\varphi\right] - mga\cos\theta\cos\varphi + 2a^2k(1-\cos\theta) \\ &= E(t=0) = 2ka^2 \end{aligned} \tag{6}$$

siendo las condiciones iniciales $\{\theta_0 = \pi/2, \varphi_0 = \pi/2, \dot{\theta}_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 0\}$.

3.– La expresión (6) es una ecuación del movimiento de las dos necesarias. Para obtener la otra tomaremos una de las ecuaciones de Lagrange. La función lagrangiana vale:

$$L = T - V = \frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\theta}^2 + 4\dot{\varphi}^2 + 4\dot{\theta}^2\cos^2\varphi\right] + mga\cos\theta\cos\varphi - 2a^2k(1-\cos\theta), \tag{7}$$

la ecuación de Lagrange asociada a θ es:

$$\frac{1}{3}ma^2\left(\ddot{\theta}+4\ddot{\theta}\cos^2\varphi-4\dot{\theta}\dot{\varphi}\operatorname{sen}2\varphi\right)+mga\operatorname{sen}\theta\cos\varphi+2a^2k\operatorname{sen}\theta=0 \qquad (8)$$

y la ecuación de Lagrange asociada a φ es:

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\varphi}+\frac{2}{3}ma^2\dot{\theta}^2\operatorname{sen}2\varphi+mga\cos\theta\operatorname{sen}\varphi=0 \qquad (9)$$

4.– La fuerza F pedida es una fuerza no conservativa equivalente a una fuerza generalizada Q_θ^{nc},

$$\delta W^{\mathrm{nc}}=Fa\delta\theta \qquad \Rightarrow \qquad Q_\theta^{\mathrm{nc}}=Fa. \qquad (10)$$

Para obtener el valor de F debemos particularizar la ecuación de Lagrange asociada a θ para $\theta=\omega t$, $\dot{\theta}=\omega$ y $\ddot{\theta}=0$ quedando:

$$\frac{1}{3}ma^2\left(-4\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}2\varphi\right)+mga\operatorname{sen}(\omega t)\cos\varphi+2a^2k\operatorname{sen}(\omega t)=Fa \qquad (11)$$

resultando el valor de la fuerza pedida:

$$F=-\frac{4}{3}ma\omega\dot{\varphi}\operatorname{sen}2\varphi+mg\operatorname{sen}(\omega t)\cos\varphi+2ka\operatorname{sen}(\omega t). \qquad (12)$$