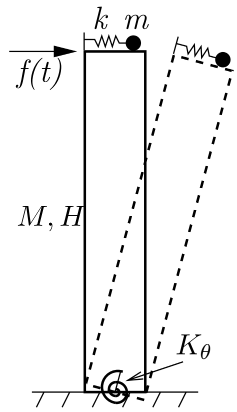
Mecánica – ICT

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (15 de julio del 2013)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Una torre de gran altura se encuentra expuesta a la acción dinámica del viento. El modelo dinámico de la torre puede considerarse equivalente a una barra rígida de masa M, altura H y sección despreciable, unida al terreno mediante una cimentación elástica con un resorte lineal a rotación de constante K_θ. En las direcciones vertical y horizontal la cimentación se puede considerar perfectamente rígida. Para reducir las oscilaciones se instala en el nivel superior de la torre un oscilador armónico horizontal de masa m y rigidez k, estando en la posición de equilibrio esta masa situada en el centro del piso. Los parámetros están relacionados mediante $M = 30m$ y $K_\theta = 10kH^2$. Se pide:



1. Ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema para oscilaciones libres, linealizadas para pequeñas oscilaciones respecto a la posición de equilibrio, identificando las matrices de masa y rigidez del sistema. Al hacer el desarrollo podrá considerarse que el movimiento de la masa superior es $x \ll H$, y asimismo despreciarse el efecto del peso al ser pequeño frente a las demás fuerzas.

2. Frecuencias propias y modos normales de vibración del sistema, dejando las frecuencias expresadas en función de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

3. La acción del viento se puede suponer como una fuerza horizontal armónica $f(t) = b \operatorname{sen} \Omega t$ aplicada en la cabeza de la torre. Obtener la expresión de las ecuaciones dinámicas desacopladas en función de las coordenadas normales (amplitudes modales).

§1. El sistema tiene dos grados de libertad, el ángulo θ girado por la torre en la cimentación flexible y el desplazamiento x de la masa m en su parte superior, relativo a la torre. Considerando pequeñas oscilaciones y las simplificaciones indicadas en el enunciado, la expresión de las energías cinética y potencial es

$$T = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}MH^2\Big)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m(\dot\theta H + \dot x)^2\,; \quad V = \frac{1}{2}K_\theta\theta^2 + \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{1}$$

A partir de estas expresiones se pueden deducir directamente los términos de las matrices de masa y rigidez,

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} \quad\Rightarrow\quad [\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} (M/3+m)H^2 & mH \\ mH & m \end{pmatrix}\,; \tag{2}$$

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad\Rightarrow\quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} K_\theta & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\,. \tag{3}$$

Las ecuaciones linealizadas de la dinámica, para oscilaciones libres, son

$$[\mathbf{M}]\begin{Bmatrix}\ddot\theta \\ \ddot x\end{Bmatrix} + [\mathbf{K}]\begin{Bmatrix}\theta \\ x\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix} \tag{4}$$

§2. Sustituyendo los datos del enunciado, las matrices quedan

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 11mH^2 & mH \\ mH & m \end{pmatrix} \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 10kH^2 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} . \tag{5}$$

Para obtener los autovalores, el polinomio característico es

$$0 = \det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = (mH)^2[10\lambda^2 - 21\lambda\omega_0^2 + 10\omega_0^4] , \tag{6}$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = \omega^2 = \omega_0^2 \left[\frac{21}{20} \mp \sqrt{\left(\frac{21}{20}\right)^2 - 1}\right] = \omega_0^2 \left[\frac{21 \mp \sqrt{41}}{20}\right] = \begin{cases} \lambda_1 = 0{,}729844\omega_0^2 \\ \lambda_2 = 1{,}370156\omega_0^2 \end{cases} \tag{7}$$

Las frecuencias propias son por tanto

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0{,}854309\omega_0 , \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1{,}170537\omega_0 . \tag{8}$$

Los modos normales de vibración son los vectores propios asociados a cada autovalor, mediante la ecuación característica

$$([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \tag{9}$$

obteniéndose los vectores siguientes

$$\{\mathbf{a}_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{41} - 1)H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2{,}7016H \end{Bmatrix} , \quad \{\mathbf{a}_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{41} + 1)H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3{,}7016H \end{Bmatrix} . \tag{10}$$

§3. Las fuerzas generalizadas asociadas a la fuerza $f(t)$ aplicada en la torre se pueden identificar en la expresión del trabajo virtual,

$$\delta W = f(t)H\delta\theta \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Hf(t) \\ 0 \end{Bmatrix} . \tag{11}$$

Las amplitudes modales dependientes del tiempo $(u_1(t), u_2(t))$ se denominan coordenadas normales. Su relación con las coordenadas geométricas se expresa en función de los vectores modales $\{\mathbf{a}_k\}$ o de la matriz modal $[\mathbf{A}]$:

$$\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = u_1(t)\{\mathbf{a}_1\} + u_2(t)\{\mathbf{a}_2\} = \underbrace{\big(\{\mathbf{a}_1\} \mid \{\mathbf{a}_2\} \big)}_{[\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}} \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Las ecuaciones desacopladas en coordenadas normales son

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k = \frac{1}{M_k}\eta_k(t) = \Gamma_k \operatorname{sen} \Omega t , \tag{13}$$

donde M_k, η_k son las masas modales y fuerzas modales respectivamente:

$$M_k = \{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{M}]\{\mathbf{a}_k\} , \quad \eta_k = \{\mathbf{a}_k\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{f}\} . \tag{14}$$

Las ecuaciones resultantes son

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + 0{,}729844\omega_0^2 u_1 &= \frac{2}{41 + \sqrt{41}} \frac{b}{mH} \operatorname{sen} \Omega t = \frac{1}{23{,}7016} \frac{b}{mH} \operatorname{sen} \Omega t \\ \ddot{u}_2 + 1{,}370156\omega_0^2 u_2 &= \frac{2}{41 - \sqrt{41}} \frac{b}{mH} \operatorname{sen} \Omega t = \frac{b}{17{,}2984mH} \operatorname{sen} \Omega t . \end{aligned} \tag{15}$$

Nota Adicional.— Aunque no se pide en el enunciado, calcularemos a continuación la amplitud del movimiento debido a la acción del viento. Esta amplitud la obtendremos en el régimen permanente, cuando debido a un pequeño amortiguamiento inevitable desaparezcan los efectos transitorios.

En esta situación, dado que el amortiguamiento es muy pequeño, la solución será $u_k(t) = c_k \operatorname{sen} \Omega t$, siendo c_k constantes a determinar. Sustituyendo en las ecuaciones (13):

$$(-\Omega^2 + \omega_k^2) c_k \operatorname{sen} \Omega t = \Gamma_k \operatorname{sen} \Omega t \;\Rightarrow\; c_k = \frac{\Gamma_k}{-\Omega^2 + \omega_k^2} \tag{16}$$

Sustituyendo para la frecuencia del viento definida en el enunciado ($\Omega = 1{,}05\omega_0$) se obtiene

$$c_1 = -\frac{1}{8{,}8325} \frac{b}{mH\omega_0^2} = -\frac{1}{8{,}8325} \frac{b}{kH}\,; \quad c_2 = \frac{1}{4{,}6300} \frac{b}{kH} \tag{17}$$

Es decir, la solución del movimiento obtenido para las coordenadas normales es

$$u_1(t) = -\frac{1}{8{,}8325} \frac{b}{kH} \operatorname{sen}(1{,}05\omega_0 t)\,, \quad u_2(t) = \frac{1}{4{,}6300} \frac{b}{kH} \operatorname{sen}(1{,}05\omega_0 t)\,. \tag{18}$$

Para las coordenadas geométricas, convirtiendo de nuevo mediante la misma relación que en la ecuación (12),

$$\begin{Bmatrix} c_\theta \\ c_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2{,}7016H & -3{,}7016H \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} -1/8{,}8325 \\ 1/4{,}6300 \end{Bmatrix} \frac{b}{kH} = \begin{Bmatrix} 0{,}102763 \\ -1{,}105352H \end{Bmatrix} \frac{b}{kH} \tag{19}$$

Es decir, el máximo desplazamiento angular de la torre sería $c_\theta = 0{,}102763 b/(kH)$, y el máximo desplazamiento de la masa m sería $c_x = 1{,}105352 b/k$.

Si se considera la torre sola sin el oscilador auxiliar en su parte superior, la ecuación del movimiento sería

$$\frac{1}{3} M H^2 \ddot{\theta} + K_\theta \theta = Hb \operatorname{sen} \Omega t\,, \tag{20}$$

o bien sustituyendo los valores de (K_θ, M),

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{b}{10mH} \operatorname{sen} \Omega t\,. \tag{21}$$

La respuesta en régimen permanente de este sistema es

$$c'_\theta = \frac{b}{10mH(-\Omega^2 + \omega_0^2)} = -0{,}975610 \frac{b}{kH}\,. \tag{22}$$

Comparando el valor de c_θ en (19) y c'_θ en (22) se comprueba que esta última es casi 10 veces mayor en valor absoluto. Es decir, la introducción del oscilador auxiliar (k, m) reduce de forma muy significativa las vibraciones. Estos dispositivos se denominan *amortiguadores de masa sintonizados (AMS)* y se colocan en torres de gran altura para mitigar las oscilaciones.

En el caso de que la frecuencia básica coincida con la frecuencia de excitación ($\omega_0 = \Omega$) se puede comprobar que la amplitud del movimiento de la torre (en régimen permanente) sería exactamente cero, lo que se denomina *antirresonancia*. El efecto teórico del AMS en este caso sería máximo, ya que la acción del viento se transferiría por entero a la vibración de mismo, sin afectar a la torre. Por el contrario, si no existiese en este caso el AMS la torre entraría en resonancia y su amplitud teóricamente crecería hasta infinito.

Los dispositivos AMS son eficaces para acciones cuyo rango de frecuencias está más o menos determinado, permitiendo mediante un sencillo sistema pasivo con una masa auxiliar y una frecuencia seleccionada reducir en gran manera las oscilaciones dinámicas de la estructura principal.