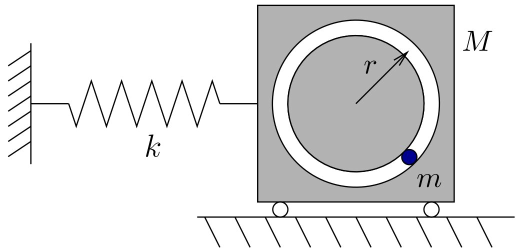
Mecánica – ICT

EXAMEN FINAL (17 de junio del 2013)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 2º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Se considera un sistema plano formado por un bloque de masa M, que se mueve sin rozamiento sobre una recta horizontal, unido mediante un resorte horizontal de constante k a una pared fija. Dentro del bloque hay una ranura circular de radio r por la que se puede mover sin rozamiento una partícula pesada de masa m.



Considerando los datos $M = 10m$ y $k = 12mg/r$, se pide:

1. Obtener la expresión de la energía cinética y energía potencial del sistema, en función de los grados de libertad y sus derivadas.
2. Ecuaciones de la dinámica linealizadas, para la hipótesis de pequeñas oscilaciones respecto de la posición de equilibrio estable, identificando las matrices de masa y rigidez.
3. Obtener las frecuencias propias y los modos normales de oscilación.
4. Se considera ahora que la pared sufre un movimiento horizontal impuesto de tipo sísmico $y(t) = a\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Obtener las ecuaciones linealizadas para el sistema identificando el vector de fuerzas equivalentes producidas por el movimiento sísmico.

---

§1. El sistema tiene dos grados de libertad, tomaremos las coordenadas libres (x, θ), siendo x la elongación horizontal del resorte medida desde su posición de equilibrio y θ el ángulo (positivo $\circlearrowleft$) de la posición de m medida desde el punto más bajo del círculo. Con estas coordenadas, las expresiones de la energía cinética y potencial son:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}r\dot{\theta}\cos\theta)\,; \tag{1}$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mgr\cos\theta\,. \tag{2}$$

§2. Obtendremos las ecuaciones por el método de Lagrange. La función Lagrangiana vale

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}r\dot{\theta}\cos\theta) - \frac{1}{2}kx^2 + mgr\cos\theta\,. \tag{3}$$

Derivando (3) se obtienen las ecuaciones de Lagrange,

$$0 = (M+m)\ddot{x} + mr\ddot{\theta}\cos\theta - mr\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta + kx \tag{4}$$

$$0 = mr^2\ddot{\theta} + mr\ddot{x}\cos\theta + mgr\,\mathrm{sen}\,\theta\,. \tag{5}$$

La posición de equilibrio estable se comprueba fácilmente que es $(x, \theta) = (0, 0)$. Linealizando para valores pequeños de (x, θ) y sus derivadas se obtienen las ecuaciones para pequeñas oscilaciones, que expresadas de forma matricial son

$$\begin{pmatrix} 11m & mr \\ mr & mr^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 12mg/r & 0 \\ 0 & mgr \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

donde hemos sustituido los valores de M y k definidos en el enunciado. Se identifican las matrices de masa y rigidez como

$$[\mathbf{M}] = \begin{pmatrix} 11m & mr \\ mr & mr^2 \end{pmatrix}; \quad [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} 12mg/r & 0 \\ 0 & mgr \end{pmatrix}. \tag{7}$$

§3. Las frecuencias propias y modos normales de vibración se obtienen de resolver el problema de autovalores,

$$([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}])\{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\}. \tag{8}$$

La ecuación característica nos permite obtener los autovalores

$$\det([\mathbf{K}] - \lambda[\mathbf{M}]) = 10m^2r^2\lambda^2 - 23m^2gr\lambda + 12m^2g^2 = 0, \tag{9}$$

cuyas soluciones son

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = \frac{4}{5}\frac{g}{r}, \quad \lambda_2 = \omega_2^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{r}. \tag{10}$$

Sustituyendo cada uno de estos autovalores en la ecuación (8) se obtienen los modos normales de vibración asociados a cada uno:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{g}{r}}; \quad \{\mathbf{a}\}_1 = \begin{Bmatrix} r/4 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{r}}; \quad \{\mathbf{a}\}_2 = \begin{Bmatrix} -r/3 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{12}$$

§4. Si se produce un movimiento impuesto de la base $y(t)$, las coordenadas (x, θ) pasan a ser ahora del movimiento relativo. Al expresar la energía cinética con las velocidades absolutas, la Lagrangiana queda modificada como sigue

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + \dot{y})^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 2(\dot{x} + \dot{y})r\dot{\theta}\cos\theta] - \frac{1}{2}kx^2 + mgr\cos\theta. \tag{13}$$

desarrollando de igual manera que antes las ecuaciones de Lagrange y linealizando, y separando los términos que provienen del movimiento de la base, se obtienen las ecuaciones de la dinámica

$$\begin{pmatrix} 11m & mr \\ mr & mr^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 12mg/r & 0 \\ 0 & mgr \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11m \\ mr \end{Bmatrix} \underbrace{a\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)}_{-\ddot{y}}. \tag{14}$$

Se trata por tanto de un movimiento forzado, en el que el vector de fuerzas equivalentes producidas por el movimiento de la base es el término a la derecha de la ecuación anterior.