Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

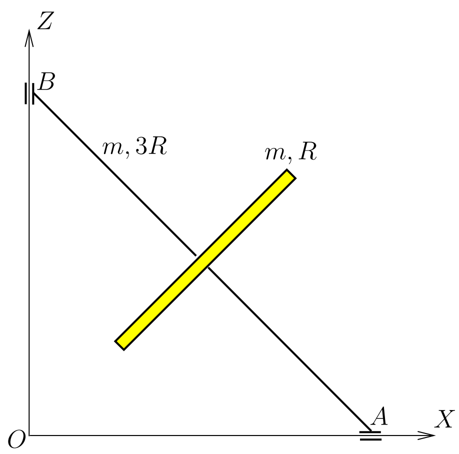
Mecánica-ICT

EXAMEN FINAL (17 de junio de 2013)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Ejercicio 3.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

Un sólido pesado está formado por una varilla AB de masa m y longitud $3R$, soldada perpendicularmente por su punto medio a un disco de masa m y radio R. Este sólido se mueve de manera que los extremos A y B de la varilla deslizan sin rozamiento por los ejes OX y OZ, respectivamente, de un sistema de referencia fijo $OXYZ$. Asimismo, el disco puede girar libremente alrededor de la varilla.



Se pide:

1. En función de los grados de libertad y sus derivadas, obtener las expresiones de la cantidad de movimiento, del momento cinético respecto del centro de masas y de la energía mecánica del sólido.

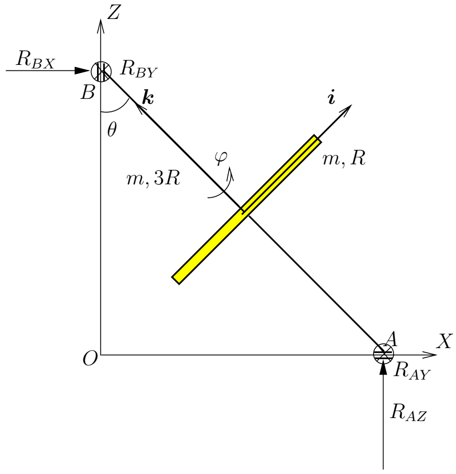
En función de los grados de libertad y sus derivadas, y de las reacciones:

2. Ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento.
3. Ecuaciones de balance del momento cinético.
4. Discutir la existencia de integrales primeras y expresar las mismas, en caso de que existan, suponiendo que en el instante inicial el sólido gira alrededor de la varilla con velocidad angular ω_0, y que ésta se encuentra en posición horizontal.

---

1. La velocidad del centro de masas del sólido, expresada en los ejes fijos, se obtiene derivando el vector de posición correspondiente:

$$\boldsymbol{r}_G = \frac{3}{2}R(\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{I}+\cos\theta\boldsymbol{K}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_G = \frac{3}{2}R\dot{\theta}(\cos\theta\boldsymbol{I}-\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{K}) \tag{1}$$



Por tanto, el vector cantidad de movimiento del sólido es:

$$\boldsymbol{\phi} = 2m\boldsymbol{v}_G = 3mR\dot{\theta}(\cos\theta\boldsymbol{I} - \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{K}) \tag{2}$$

El momento cinético en G lo expresamos en el triedro intermedio de la figura, en el que el eje $\boldsymbol{j}$ es horizontal a lo largo del movimiento y $\boldsymbol{k}$ coincide con la varilla. El tensor de inercia en G, expresado en dichos ejes, vale:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

y la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{4}$$

En consecuencia, la expresión del momento cinético en G es:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} = -mR^2\dot{\theta}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{5}$$

Finalmente, la energía mecánica del sólido se expresa como:

$$E = \frac{1}{2}2m\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} + 2mg\frac{3}{2}R\cos\theta = \frac{11}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 + 3mgR\cos\theta \tag{6}$$

2. Las reacciones en los extremos de la varilla las denominamos:

$$\boldsymbol{R}_A = R_{AY}\boldsymbol{J} + R_{AZ}\boldsymbol{K} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{R}_B = R_{BX}\boldsymbol{I} + R_{BY}\boldsymbol{J} \tag{8}$$

A partir del teorema de la cantidad de movimiento ($\sum \boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}_G$), derivando $\boldsymbol{\phi}$ en (2), resultan las ecuaciones:

$$R_{BX} = 3mR(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta) \tag{9}$$

$$R_{AY} + R_{BY} = 0 \tag{10}$$

$$R_{AZ} - 2mg = -3mR(\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{11}$$

3. Teniendo en cuenta que, de acuerdo con (10) $R_{BY} = -R_{AY}$, el momento en G de las reacciones expresado en los ejes móviles, es:

$$\boldsymbol{M}_G = 3RR_{AY}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}R(-R_{AZ}\operatorname{sen}\theta + R_{BX}\cos\theta)\boldsymbol{j} \tag{12}$$

Para derivar la expresión (5) ha de tenerse en cuenta que $\boldsymbol{H}_G$ está expresado en unos ejes móviles que rotan con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = -\dot{\theta}\boldsymbol{j}$:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_G}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}\wedge\boldsymbol{H}_G = -\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\boldsymbol{i} - mR^2\ddot{\theta}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{13}$$

Identificando las componentes de (12) y (13), resulta:

$$R_{AY} = -\frac{1}{6}mR\dot{\theta}\dot{\varphi} \tag{14}$$

$$-R_{AZ}\operatorname{sen}\theta + R_{BX}\cos\theta = -\frac{2}{3}mR\ddot{\theta} \tag{15}$$

$$0 = \ddot{\varphi} \tag{16}$$

4. Dado que el peso es la única fuerza activa aplicada, y los enlaces son lisos, se conserva la energía mecánica. Sustituyendo en (6) las condiciones iniciales dadas en el enunciado, se obtiene el valor de la constante E, resultando:

$$11\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 12\frac{g}{R}\cos\theta = \omega_0^2 \tag{17}$$

Por otra parte, de la ecuación (16) resulta:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \tag{18}$$

que se interpreta como la conservación de la proyección del momento cinético sobre el eje de revolución, $\boldsymbol{k}$, del sólido.