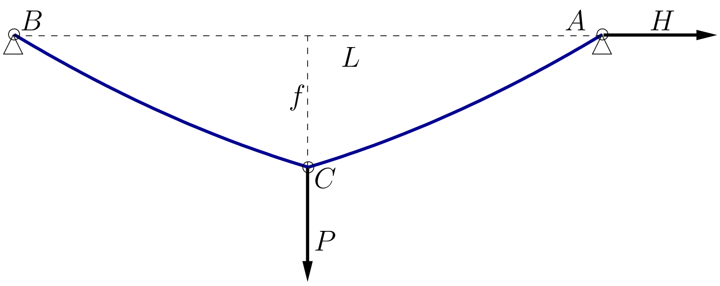
Mecánica – ICT

EXAMEN FINAL EXTRAORDINARIO (12 de julio del 2014)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Ejercicio 2.º (puntuación: 10/30) Tiempo: 60 min.

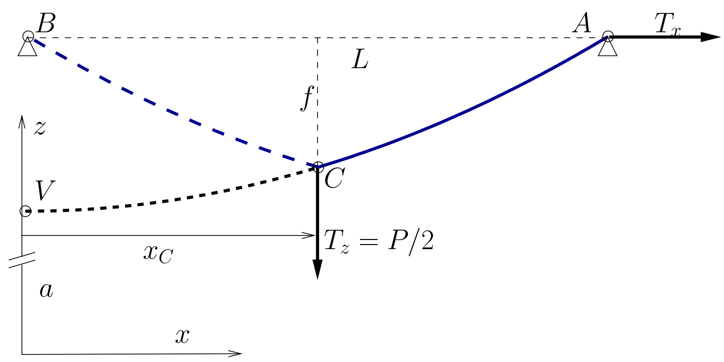
Un cable inextensible. flexible y homogéneo, de peso q por unidad de longitud, está colgado de dos puntos fijos A y B situados a la misma altura y a una distancia conocida L. El cable soporta una carga vertical $P = 2qL$ colgada mediante una pequeña argolla deslizante. Se sabe además que la reacción horizontal en los anclajes vale $H = 4qL$. Se pide



1. Longitud S del cable entre A y B, así como la flecha f del cable (distancia vertical máxima por debajo de AB), expresadas ambas en función de L.
2. Se define la rigidez vertical del cable como $K_z = \mathrm{d}P/\mathrm{d}f$, es decir la razón entre un incremento infinitesimal de la carga P y el incremento consiguiente de la flecha f. Se deberá suponer que en el extremo A hay un anclaje controlado de forma que tanto la posición del apoyo como la tensión horizontal H del cable se mantienen constantes. Calcular esta rigidez para la configuración de equilibrio del cable.

---

§1. La carga P se sitúa en el punto medio del cable, que formará dos arcos simétricos de catenaria. Fijándonos en el arco de catenaria AC, tendrá su vértice en un punto V a partir del cual se miden la abscisa x de la ecuación de la catenaria, $z = a\cosh(x/a)$, estando el origen de z a una distancia a por debajo de V. El dato de la tensión horizontal permite calcular el parámetro a de la catenaria,



$$qa = 4qL \quad \Rightarrow \quad a = 4L\,. \tag{1}$$

Debido a la simetría, la tensión vertical en C vale $P/2$:

$$T_{z,C} = qa\,\mathrm{senh}\,\frac{x_C}{a} = qL \quad \Rightarrow \quad \mathrm{senh}\,\frac{x_C}{a} = \frac{1}{4}\,, \tag{2}$$

esto permite obtener el valor de la abscisa $x_C = 0{,}98987L$.

Teniendo en cuenta que la abscisa del extremo A es $x_A = x_C + L/2$, se puede obtener la longitud del cable como

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= a\,\mathrm{senh}\big(\frac{x_C}{a} + \frac{L}{2a}\big) - a\,\mathrm{senh}\,\frac{x_C}{a}\\ &= a\Big[\big(\mathrm{senh}\,\frac{x_C}{a}\cosh\frac{L}{2a} + a\cosh\frac{x_C}{a}\,\mathrm{senh}\,\frac{L}{2a}\big) - \mathrm{senh}\,\frac{x_C}{a}\Big]\\ &= a\left(\frac{1}{4}\cosh\frac{1}{8} + \sqrt{1+(1/4)^2}\,\mathrm{senh}\,\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right),\end{aligned} \tag{3}$$

de donde resulta

$$S = 1{,}0491L\,. \tag{4}$$

La flecha del cable se calcula como

$$\begin{aligned} f &= a\cosh\Big(\frac{x_C}{a} + \frac{L}{2a}\Big) - a\cosh\frac{x_C}{a} \\ &= a\Big[\Big(\cosh\frac{x_C}{a}\cosh\frac{L}{2a} + \operatorname{senh}\frac{x_C}{a}\operatorname{senh}\frac{L}{2a}\Big) - \cosh\frac{x_C}{a}\Big] \\ &= a\Big(\sqrt{1+(1/4)^2}\cosh\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{senh}\frac{1}{8} - \sqrt{1+(1/4)^2}\Big)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

de donde resulta

$$f = 0{,}15758\,L\,. \tag{6}$$

§2. La rigidez se expresa como $K_z = \mathrm{d}P/\mathrm{d}f$, manteniéndose constante $H = 4qL$. Para obtener los diferenciales definimos un parámetro α que permite expresar la carga como $P(\alpha) = 2\alpha qL$, tomando el valor $\alpha = 1$ para la configuración de cálculo. El diferencial vale

$$\mathrm{d}P = 2qL\mathrm{d}\alpha \tag{7}$$

El valor de la flecha en función de α se obtiene generalizando el resultado (5),

$$f(\alpha) = a\sqrt{1+(\alpha/4)^2}\Big(\cosh\frac{1}{8} - 1\Big) + a\frac{\alpha}{4}\operatorname{senh}\frac{1}{8}\,, \tag{8}$$

de donde el diferencial es

$$\mathrm{d}f = a\frac{\cancel{2}\alpha/16}{\cancel{2}\sqrt{1+(\alpha/4)^2}}\Big(\cosh\frac{1}{8} - 1\Big) + a\frac{1}{4}\operatorname{senh}\frac{1}{8} \tag{9}$$

Dividiendo (7) por (9) y particularizando para $\alpha = 1$ se obtiene

$$K_z = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}f} = \frac{2q}{\frac{1/4}{\sqrt{1+1/16}}\big(\cosh\frac{1}{8} - 1\big) + \operatorname{senh}\frac{1}{8}} = 15{,}720\,q\,. \tag{10}$$